

## QB365 Question Bank Software Study Material

அணிகள் மற்றும் அணிக்கோவைகளின் பயன்பாடுகள் முக்கியமான 2,3 & 5 மதிப்பெண் வினாக்கள் விடைகளுடன்

12ம் வகுப்பு  
வணிகக் கணிதம் மற்றும் புள்ளியியல்

மொத்த மதிப்பெண் : 75

### 2 மதிப்பெண் வினாக்கள்

10 x 2 = 20

1)  $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$  என்ற அணியின் தரத்தினைக் காண்க.

**பதில் :**  $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$  என்க

A-ன் வரிசை  $2 \times 2 \therefore \rho(A) \leq 2$

இரண்டாம் வரிசை சிற்றணிக்கோவையை கருத, நாம் பெறுவது

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \text{ ஆகும்.}$$

$\Rightarrow$  பூச்சியமற்ற சிற்றணிக்கோவையின் வரிசை 2 ஆகும்.  $\therefore \rho(A) = 2$

2)  $\begin{pmatrix} -5 & -7 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$  என்ற அணியின் தரத்தினைக் காண்க.

**பதில் :**  $A = \begin{pmatrix} -5 & -7 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$  என்க.

A-ன் வரிசை  $2 \times 2 \therefore \rho(A) \leq 2$

இரண்டாம் வரிசை சிற்றணிக்கோவையை கருத, நாம் பெறுவது  $\begin{vmatrix} -5 & -7 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 0$  ஆகும்.

இரண்டாம் வரிசை சிற்றணிக்கோவை பூச்சியமாவதால்,  $\rho(A) \neq 2$

ஒன்றாம் வரிசை கொண்ட ஒரு சிற்றணிக்கோவையை கருத, நாம் பெறுவது  $|-5| \neq 0$  ஆகும்.

$\Rightarrow$  பூச்சியமற்ற சிற்றணிக்கோவையின் வரிசை 1 ஆகும்.  $\therefore \rho(A) = 1$

3)  $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$  என்ற அணியின் தரத்தினைக் காண்க.

**பதில் :**  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$  என்க.

A-ன் வரிசை  $3 \times 3$

$\therefore \rho(A) \leq 3$

வரிசை மூன்று உடைய சிற்றணிக்கோவையை கருத, நாம் பெறுவது  $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$

$\Rightarrow$  பூச்சியமற்ற சிற்றணிக்கோவையின் வரிசை 3 ஆகும்.  $\therefore \rho(A) = 3$

4)  $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \\ -2 & -4 & 8 \end{pmatrix}$  என்ற அணியின் தரத்தினைக் காண்க.

**பதில் :**  $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \\ -2 & -4 & 8 \end{pmatrix}$  என்க.

A-ன் வரிசை  $3 \times 3 \therefore \rho(A) \leq 3$

வரிசை மூன்று உடைய சிற்றணிக்கோவையை கருத, நாம் பெறுவது  $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \\ -2 & -4 & 8 \end{vmatrix} = 0$

$\therefore$  மூன்றாம் வரிசைக் கொண்ட சிற்றணிக்கோவை பூச்சியமாவதால்,  $\rho(A) \neq 3$  ஆகும்.

இரண்டாம் வரிசை கொண்ட ஒரு சிற்றணிக்கோவையை கருத, நாம் பெறுவது  $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$  ஆகும்.

$\Rightarrow$  பூச்சியமற்ற சிற்றணிக்கோவையின் வரிசை 2 ஆகும்.  $\therefore \rho(A) = 2$

5)  $3x - 2y = 6$ ,  $6x - 4y = 10$  என்ற சமன்பாடுகள் ஒருங்கமைவு அற்றது எனக் காட்டுக.

**பதில் :** அணி சமன்பாடு

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$AX=B$

அணி A	விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணி [A,B]	அடிப்படை உருமாற்றம்
$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 6 & -4 & 10 \end{pmatrix}$	
$\sim \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\sim \begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$	$R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1$
$\rho(A)=1$	$\rho([A,B])=2$	

$\therefore \rho([A,B])=2$ ,  $\rho(A)=1$

$\rho(A) \neq \rho([A,B])$

$\therefore$  கொடுக்கப்பட்ட தொகுப்பு ஒருங்கமைவு அற்றது.

6) பின்வரும் அணிகளின் தரம் காண்க.

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

**பதில் :**  $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$  என்க

A -ன் வரிசை  $2 \times 2$ , எனவே  $\rho(A) \leq 2$

$$\sim \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad R_2 \rightarrow 5R_2 - 7R_1$$

அணியின் தரம்  $\rho(A)=2$

7) 3 அலகுகள் தொழிலாளரின் சம்பளம் மற்றும் 2 அலகுகள் மூலதனம் கொண்டு தயாரிக்கப்படும் உற்பத்தி பொருள்களுக்கான செலவு ரூ.62 ஆகும். 4 அலகுகள் தொழிலாளரின் சம்பளம் மற்றும் 1 அலகு மூலதனம் கொண்டு பொருள்கள் உற்பத்தி செய்யப்பட்டிருந்தால் அதன் மொத்த செலவு ரூ.56 எனில், அணிக்கோவை முறையில் தொழிலாளர் மற்றும் மூலதனத்தின் ஒரு அலகுக்கு ஆகும் செலவினைக் காண்க.

**பதில் :**  $x, y$  அலகுகள் தொழிலாளர் அலகு, முதலீடு அலகு ஆகியவற்றின் விலையைக் குறிக்கட்டும்.

$$3x + 2y = 62$$

$$4x + y = 56$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3(1) - 4(2) = 3 - 8 = -5 \neq 0$$

$\therefore$  கிரேமரின் விதியைப் பயன்படுத்தலாம்

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 62 & 2 \\ 56 & 1 \end{vmatrix} = 62(1) - 56(2) = 62 - 112 = -50 \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 62 \\ 4 & 56 \end{vmatrix} = 3(56) - 4(62) = 168 - 248 = -80$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-50}{-5} = 10$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-80}{-5} = 16.$$

$\therefore$  தொழிலாளருக்கான ஒரு அலகு செலவு ரூ.10 மற்றும் முதலீட்டிற்கான ஒரு அலகு செலவு ரூ.16

8)  $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 7 \\ 9 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$  என்ற அணியின் தரத்தினைக் காண்க.

**பதில் :**  $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 7 \\ 9 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 7 \\ 0 & 28 & -34 & -63 \end{pmatrix} \quad R_2 \rightarrow R_2 - 9R_1$$

அணியின் தரம்  $\rho(A)=2$

9) பின்வரும் அணிகளின் தரம் காண்க.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$$

**பதில் :**  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$  என்க

A -ன் வரிசை  $2 \times 2$ , எனவே  $\rho(A) \leq 2$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} R_2 \rightarrow R_2 - 3R_1$$

அணியின் தரம்  $\rho(A) = 2$

10) பின்வரும் அணிகளின் தரம் காண்க.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

**பதில் :**  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$

A -ன் வரிசை  $2 \times 2$ , எனவே  $\rho(A) \leq 2$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1$$

அணியின் தரம்  $\rho(A)=1$

### 3 மதிப்பெண் வினாக்கள்

10 x 3 = 30

11)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & 3 & -7 \end{pmatrix}$  என்ற அணியின் தரத்தினைக் காண்க .

**பதில் :**  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & 3 & -7 \end{pmatrix}$  என்க.

A -ன் வரிசை  $3 \times 4$

$\therefore \rho(A) \leq 3$ .

மூன்றாம் வரிசை கொண்ட சிற்றணிக்கோவைகளை கருத, நாம் பெறுவது

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & -7 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 6 & -7 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ 6 & 3 & -7 \end{vmatrix} = 0 \text{ ஆகும்.}$$

அனைத்து மூன்றாம் வரிசை கொண்ட சிற்றணிக்கோவைகளின் மதிப்புகளும் பூச்சியமாகும்.

$\rho(A) \neq 3$ .

ஏதேனும் ஒரு இரண்டாம் வரிசை சிற்றணிக்கோவையை கருத, நாம் பெறுவது  $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$  ஆகும்.

$\Rightarrow$  பூச்சியமற்ற சிற்றணிக்கோவையின் வரிசை 2 ஆகும்.  $\therefore \rho(A) = 2$

12)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$  என்ற அணியின் தரத்தினைக் காண்க.

**பதில் :** A -ன் வரிசை  $3 \times 3 \therefore \rho(A) \leq 3$ .

அணி A -ஐ, ஏறுபடி வடிவத்திற்கு மாற்றியமைக்க,

அணி A	அடிப்படை உருமாற்றங்கள்
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$	
$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$	$R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1$ $R_3 \rightarrow R_3 - 3R_1$
$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$R_3 \rightarrow R_3 - R_1$
கடைசியாக பெறப்பட்ட அணியானது ஏறுபடிவ வடிவில் உள்ளது.	

ஏறுபடிவ அணியில் உள்ள பூச்சியமற்ற நிரைகளின் எண்ணிக்கை 2 ஆகும்.  $\therefore \rho(A) = 2$ .

13)  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$  என்ற அணியின் தரத்தினைக் காண்க.

**பதில் :** A-ன் வரிசை  $3 \times 4 \therefore \rho(A) \leq 3$ .

அணி A -ஐ, ஏறுபடி வடிவத்திற்கு மாற்றியமைக்க

அணி A	அடிப்படை உருமாற்றங்கள்
$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$R_1 \leftrightarrow R_2$
$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -8 & -3 \end{pmatrix}$	$R_3 \rightarrow R_3 - 3R_1$
$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	$R_3 \rightarrow R_3 + 5R_2$

ஏறுபடிவ அணியில் உள்ள பூச்சியமற்ற நிரைகளின் எண்ணிக்கை 3 ஆகும்.  $\therefore \rho(A) = 3$ .

- 14)  $x + y = 5$ ,  $2x + y = 8$  ஆகிய சமன்பாடுகள் ஒருங்கமைவு உடையது எனில் அவற்றைத் தீர்க்க.

**பதில் :** கொடுக்கப்பட்ட தொகுப்பிற்கான அணி சமன்பாடு

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$A X = B$

அணி A	விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணி [A,B]	அடிப்படை உருமாற்றம்
$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$	
$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$	$R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1$
$\rho(A)=2$	$\rho([A,B])=2$	

ஏறுபடிவ அணியில் உள்ள பூச்சியமற்ற நிரைகளின் எண்ணிக்கை 2 ஆகும்.

$\rho(A)=\rho([A,B])=2$ =மதிப்பிடவேண்டிய மாறிகளின் எண்ணிக்கை

$\therefore$  கொடுக்கப்பட்ட தொகுப்பு ஒருங்கமைவுடையது மேலும் ஒரே ஒரு தீர்வு உண்டு.

கொடுக்கப்பட்ட தொகுப்பினை  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$  என எழுதலாம்.

$$\Rightarrow x + y = 5 \dots\dots(1)$$

$$y = 2$$

$$\therefore (1) \Rightarrow x + 2 = 5$$

$$x = 3$$

**தீர்வு:**  $x = 3$ ,  $x = 2$

- 15)  $x + y + z = 6$ ,  $x + 2y + 3z = 14$ ,  $x + 4y + 7z = 30$  என்ற சமன்பாடுகள் ஒருங்கமைவு அற்றவை எனக்காட்டுக.

**பதில் :** அணி சமன்பாடு

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ 30 \end{pmatrix}$$

A X = B

விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணி [A,B]	அடிப்படை உருமாற்றங்கள்
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \\ 1 & 4 & 7 & 30 \end{pmatrix}$	
$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 2 & 4 & 16 \end{pmatrix}$	$R_2 \rightarrow R_2 - R_1$ $R_3 \rightarrow R_3 - R_1$
$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$R_3 \rightarrow R_3 - 2R_2$
$\rho(A)=2, \rho([A,B])=2$	

கடைசி சமான அணி ஏறுபடி வடிவில் உள்ளது. இதில் இரண்டு பூச்சியமற்ற நிரைகள் உள்ளன.

$$\therefore \rho(A)=\rho([A,B])=2$$

இங்கு,  $\rho(A)=\rho([A,B])=2 <$  மதிப்பிட வேண்டிய மாறிகளின் எண்ணிக்கை

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட தொகுப்பு ஒருங்கமைவு உடையது. மேலும் எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகள் உண்டு.

கொடுக்கப்பட்ட தொகுப்பிற்கு சமானமான அணி சமன்பாடு

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x+y+z = 6 \quad \dots(1)$$

$$y+2z=8 \quad \dots(2)$$

$$(2) \Rightarrow y=8-2z$$

$$(1) \Rightarrow x=6-y-z=6-(8-2z)-z=z-2$$

$z=k, k \in \mathbb{R}$  எனக் கொண்டால் வெவ்வேறு தீர்வுகளை நாம் பெறலாம். எனவே கொடுக்கப்பட்ட தொகுப்பு எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகளைப் பெற்றிருக்கும்.

- 16)  $x - 4y + 7z = 14, 3x + 8y - 2z = 13, 7x - 8y + 26z = 5$  என்ற சமன்பாடுகள் ஒருங்கமைவு அற்றவை எனக்காட்டுக.

**பதில் :** அணி சமன்பாடு

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 7 \\ 3 & 8 & -2 \\ 7 & -8 & 26 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 13 \\ 5 \end{pmatrix}$$

A X = B

விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணி [A,B]	அடிப்படை உருமாற்றங்கள்
$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 7 & 14 \\ 3 & 8 & -2 & 13 \\ 7 & -8 & 26 & 5 \end{pmatrix}$	
$\sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 7 & 14 \\ 0 & 20 & -23 & -29 \\ 0 & 20 & -23 & -93 \end{pmatrix}$	$R_2 \rightarrow R_2 - 3R_1$ $R_3 \rightarrow R_3 - 7R_1$
$\sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 7 & 14 \\ 0 & 20 & -23 & -29 \\ 0 & 0 & 0 & 64 \end{pmatrix}$	$R_3 \rightarrow R_3 - 2R_2$
$\rho(A)=3, \rho([A,B])=3$	

கடைசி சமானமான அணி ஏறுபடி வடிவில் உள்ளது. இதில் மூன்று பூச்சியமற்ற நிரைகள் உள்ளன.

$$\therefore \rho([A,B])=3, \rho(A)=3$$

$$\rho(A) = \rho([A,B])$$

எனவே, சமன்பாட்டுத் தொகுப்பு ஒருங்கமைவு அற்றது மற்றும் தீர்வு ஏதுமில்லை.

- 17) மெரினா கடற்கரையில் இரண்டு சிறுமிகள் குதிரை சவாரி மற்றும் கிவாட் பைக் சவாரியை மணி நேர வாடகையில் விளையாடுகிறார்கள். மே மாதத்தின் போது சிறுமி கெரன் ரூ.780-ம் சிறுமி பெனிட்டா ரூ.560-ம் செலவு செய்தார்கள். அதன் விவரம் கீழ்க்காணும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

பெயர்	பயன்படுத்திய காலம் (மணிகளில்)		மொத்த செலவு (ரூ)
	குதிரை சவாரி	கிவாட் பைக் சவாரி	
கெரன்	3	4	780

பெண்ட்டா2	3	560
-----------	---	-----

இரண்டு விளையாட்டுகளுக்கான ஒரு மணி நேர வாடகையை அணிக்கோவை முறையில் காண்க.

**பதில் :** x என்பது ஒரு மணி நேர குதிரை சவாரிக்கான மணிநேர வாடகை மற்றும் 'y' என்பது ஒரு மணி நேர கிவாட் பைக் சவாரிக்கான மணி நேர வாடகை என்க,

$$3x + 4y = 780$$

$$2x + 3y = 560$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3(3) - 2(4) = 9 - 8 = 1 \neq 0$$

∴ கிரேமரின் விதியைப் பயன்படுத்தலாம்

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 780 & 4 \\ 560 & 3 \end{vmatrix} = 780(3) - 4(560)$$

$$= 2340 - 2240 = 100$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 3 & 780 \\ 2 & 560 \end{vmatrix} = 3(560) - 2(780)$$

$$= 1680 - 1560 = 120$$

$$\therefore x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{100}{1} = 100$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{120}{1} = 120$$

∴ குதிரை சவாரிக்கான மணிநேர வாடகை ரூ.100 மற்றும் கிவாட் பைக் சவாரிக்கான மணி நேர வாடகை ரூ.120

18)  $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \\ 4 & 4 & 8 & 0 \end{pmatrix}$  என்ற அணியின் தரத்தினைக் காண்க.

**பதில் :**  $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \\ 4 & 4 & 8 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & -2 & 18 \\ 0 & -1 & 6 & -2 \end{pmatrix} R_3 \rightarrow 4R_3 - 3R_1$$

$$R_3 \rightarrow R_3 + R_1$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & -2 & 18 \\ 0 & -1 & 44 & -32 \end{pmatrix} R_3 \rightarrow 7R_3 + R_2$$

அணியின் தரம்  $\rho(A)=3$

19) பரிதி என்பவர் ஒவ்வொரு நாளும் சோகமாகவோ (S) அல்லது மகிழ்ச்சியாகவோ (H) உள்ளார். ஒரு நாள் மகிழ்ச்சியாக இருந்தால், அடுத்த நாள் 5-ல் 4-பங்கு சோகமாக இருப்பார். ஒரு நாள் சோகமாக இருந்தால், அடுத்த நாள் 3-ல் 2 பங்கு மகிழ்ச்சியாக இருப்பார் எனில், நீண்டகால அடிப்படையில் ஏதாவது ஒரு குறிப்பிட்ட நாளில் மகிழ்ச்சியாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு காண்க

**பதில் :** மாறுதல் நிகழ்தகவு அணி  $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

சமநிலையில்,  $(S \ H) \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} (S \ H)$

இங்கு  $S + H = 1$

$$\frac{1}{3}S + \frac{4}{5}H = S$$

$$\frac{1}{3}(1 - H) + \frac{4}{5}H = 1 - H$$

இதைத் தீர்க்க, நாம் பெறுவது  $S = \frac{6}{11}$  மற்றும்  $H = \frac{5}{11}$

நீண்ட கால அடிப்படையில், தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட நாளில் மகிழ்ச்சியாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு  $\frac{5}{11}$  ஆகும்.

20) பின்வரும் அணிகளின் தரம் காண்க.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

**பதில் :**  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}$  என்க

A -ன் வரிசை  $3 \times 4$ , எனவே  $\rho(A) \leq 3$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 10 & 10 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_2 \rightarrow R_2 + 2R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 + R_1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_3 \rightarrow R_3 - 2R_2 \end{matrix}$$

ஏறுபடிவ அணியில் உள்ள பூச்சியமற்ற நிரைகளின் எண்ணிக்கை 2 ஆகும்.  $\therefore \rho(A) = 2$ .

### 5 மதிப்பெண் வினாக்கள்

5 x 5 = 25

- 21) ஒரு தொகை ரூ.5,000 ஆனது ஆண்டிற்கு 6%, 7% மற்றும் 8% தரக்கூடிய மூன்று பங்குகளில் பிரித்து முதலீடு செய்யப்பட்டு, ஆண்டு மொத்த வருமானமாக ரூ.358 பெறப்படுகிறது. முதல் இரண்டு முதலீடுகளிலிருந்து கிடைக்கும் வருமானம், மூன்றாவது முதலீட்டிலிருந்து கிடைக்கும் வருமானத்தை விட ரூ.70 அதிகம் எனில், அம்மூன்று பங்குகளில் செலுத்தப்படும் முதலீடுகளை தரமுறையில் காண்க.

**பதில் :** x, y மற்றும் z என்பன முறையே 6%, 7% மற்றும் 8% பத்திரங்களில் இடப்பட்ட தொகை என்க.

$$\begin{aligned} x + y + z &= 5000 \\ \frac{6x}{100} + \frac{7y}{100} + \frac{8z}{100} &= 358 \\ 6x + 7y + 8z &= 35800 \\ \frac{6x}{100} + \frac{7y}{100} - \frac{8z}{100} &= 70 \\ 6x + 7y - 8z &= 7000 \end{aligned}$$

கொடுக்கப்பட்ட தொகுப்பிற்கான அணிச் சமன்பாடு

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5000 \\ 35800 \\ 7000 \end{pmatrix}$$

AX = B

விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணி

$$\begin{aligned} (A, B) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5000 \\ 6 & 7 & 8 & 35800 \\ 6 & 7 & -8 & 7000 \end{pmatrix} \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5000 \\ 0 & 1 & 2 & 5800 \\ 0 & 1 & -14 & -23000 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_2 \rightarrow R_2 - 6R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 6R_1 \end{matrix} \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5000 \\ 0 & 1 & 2 & 5800 \\ 0 & 1 & -16 & -28800 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_3 \rightarrow R_3 - R_2 \end{matrix} \end{aligned}$$

$\rho(A, B) = \rho(A) = 3$  (மாறிகளின் எண்ணிக்கை)

சமன்பாட்டு தொகுப்பானது ஒருங்கமையுடையது மற்றும் ஒரேயொரு தீர்வைக் கொண்டது.

கடைசி சமமான அணியின் மாற்றப்பட்ட அணிச் சமன்பாடு

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5000 \\ 5800 \\ -28800 \end{pmatrix}$$

$$-16z = -28800$$

$$z = 1800$$

$$y + 2z = 5800$$

$$y = 5800 - 3600$$

$$y = 2200$$

$$x + y + z = 5000$$

$$x + 2200 + 1800 = 5000$$

$$x = 1000$$

$\therefore$  6%, 7% மற்றும் 8% பத்திரங்களில் முதலீடு செய்யப்பட்ட தொகை முறையே ரூ. 1000, ரூ. 2200 மற்றும் ரூ. 1800 ஆகும்.

- 22) மொத்த தொகை ரூ.8,500 ஆனது வட்டி வருமானம் தரும் மூன்று விதமான கணக்குகளில் முதலீடு செய்யப்பட்டது. ஒவ்வொரு முதலீட்டுக்கான வட்டிவீதம் 2%, 3% மற்றும் 6% ஆகவும், ஒரு வருடத்திற்கான மொத்த வட்டி ரூ.380 ஆகவும்



உள்ளது. மேலும் 6% முதலீட்டு தொகையானது மற்ற முதலீடுகளின் கூட்டுத்தொகைக்கு சமம் எனில், கிரேமரின் விதியைக் கொண்டு ஒவ்வொரு பிரிவிலும் செய்த முதலீட்டுத் தொகை எவ்வளவு?

**பதில் :** மூன்று கணக்குகளிலும் முதலீடு செய்யப்பட்டத் தொகை முறையே  $x, y$  மற்றும்  $z$  என்க.

$$x+y+z = 8500$$

$$\frac{2x}{100} + \frac{3y}{100} + \frac{6z}{100} = 380$$

$$2x+3y+6z = 38000$$

$$z=x+y$$

சமன்பாடுகள்

$$x+y+z = 8500$$

$$2x+3y+6z = 38000$$

$$x+y-z = 0$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-3-6)-1(-2-6)+1(2-3)$$

$$= -9 +8 -1 = -2 \neq 0$$

∴ கிரேமரின் விதியை பயன்படுத்தலாம் .

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 8500 & 1 & 1 \\ 38000 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

முதல் நிரலைப் பயன்படுத்தி விரிவாக்க,

$$= 8500(-3-6)-38000(-1-1)$$

$$= -76500+76000 = -500$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 8500 & 1 \\ 2 & 38000 & 6 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

இரண்டாம் நிரலைப் பயன்படுத்தி விரிவாக்க,

$$= -8500(-2-6)+38000(-1-1)$$

$$= 68000-76000 = -8000$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 8500 \\ 2 & 3 & 38000 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

மூன்றாம் நிரலைப் பயன்படுத்தி விரிவாக்க,

$$= 8500(2-3) - 38000(1-1)$$

$$= -8500$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-500}{-2} = 250$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-8000}{-2} = 4000$$

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-8500}{-2} = 4250$$

∴ மூன்று கணக்குகளிலும் முதலீடு செய்யப்பட்ட தொகை ரூ .250, ரூ.4000 மற்றும் ரூ.4250.

- 23) ஒரு தொழிற்சாலையில் உற்பத்தி செய்யப்படும் மொத்த அலகுகளின் நேரிய சார்பு  $P = a + bl + cm$  இங்கு தொழிலாளர்களின் கூடுதல் உழைப்பு நேரம் (மணியில்)  $l$ , கூடுதல் இயந்திரம் நேரம் (மணியில்)  $m$  மற்றும் வேலையை முடிக்கும் நேரம்  $a$  (நிலையானது) எனில் பின்வரும் விவரங்களிலிருந்து  $a, b$  மற்றும்  $c$  ஆகிய மாறிலிகளின் மதிப்புகளைக் காண்க.

நாள்	உற்பத்தி (P அலகுகள்)	உழைப்பு நேரம் (l மணியில்)	கூடுதல் இயந்திரம் நேரம் (m மணியில்)
திங்கள்	6,950	40	10
செவ்வாய்	6,725	35	9
புதன்	7,100	40	12

மேலும் உழைப்பு நேரம் 50 மணிகள் மற்றும் கூடுதல் இயந்திரம் நேரம் 15 மணிகள் எனில் உற்பத்தியைக் கணக்கிடுக.



**பதில் :**  $P = a + bl + cm$  என்பது உற்பத்தி சமன்பாடு ஆகும்.

கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளிலிருந்து

$$6,950 = a + 40b + 10c$$

$$6,725 = a + 35b + 9c$$

$$7,100 = a + 40b + 12c$$

தரப்பட்ட சமன்பாட்டு தொகுப்புக்குரிய அணிச் சமன்பாடானது

$$\begin{pmatrix} 1 & 40 & 10 \\ 1 & 35 & 9 \\ 1 & 40 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6950 \\ 6725 \\ 7100 \end{pmatrix}$$

$A X = B$

விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணி [A,B]	அடிப்படை உருமாற்றங்கள்
$\begin{pmatrix} 1 & 40 & 10 & 6950 \\ 1 & 35 & 9 & 6725 \\ 1 & 40 & 12 & 7100 \end{pmatrix}$	
$\sim \begin{pmatrix} 1 & 40 & 10 & 6950 \\ 0 & -5 & -1 & -225 \\ 0 & 0 & 2 & 150 \end{pmatrix}$	$R_2 \rightarrow R_2 - 3R_1$ $R_3 \rightarrow R_3 - 2R_1$
$\rho(A)=3, \rho([A,B])=3$	

$\therefore$  தரப்பட்ட சமன்பாட்டு தொகுப்புக்குரிய சமானமான அணிச் சமன்பாடு

$$\begin{pmatrix} 1 & 40 & 10 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6950 \\ -225 \\ 150 \end{pmatrix}$$

$$a+40b+10c=6950 \quad (1)$$

$$-5b-c=-225 \quad (2)$$

$$2c=150 \quad (3)$$

$$c=75$$

$$\text{இப்பொழுது, (2) } \Rightarrow -5b-75=-225$$

$$b=30$$

$$\text{மற்றும் (1) } \Rightarrow a+1200+750=6950$$

$$a=5000$$

$$a=5000, b=30, c=75$$

$$\therefore \text{ உற்பத்தி சமன்பாடு } P=5000+30l+75m$$

$$t=50, m=15 \text{ இல் } P=5000+30(50)+75(15)$$

$$=7625$$

$\therefore$  உற்பத்தி =7,625 அலகுகள்.

- 24) சென்னை நகரில் ஒரு புதிய போக்குவரத்து வசதி செயல்பாட்டிற்கு வந்துள்ளது. அதனை இந்த ஆண்டு பயன்படுத்துபவர்கள் 30% பேர் அடுத்த ஆண்டு பயன்படுத்தாமல் மெட்ரோ ரயில் வண்டிக்கு மாறி விடுவர். மீதி 70% தொடர்ந்து அப்புதிய போக்குவரத்து வசதியைப் பயன்படுத்துவர். இந்த ஆண்டு மெட்ரோ ரயில் வண்டியை பயன்படுத்துபவர்களில் 70% பேர் அடுத்த ஆண்டும் தொடர்ந்து அதையே பயன்படுத்துபவர் மீதி 30% பேர் புதிய போக்குவரத்து வசதிக்கு மாறிவிடுவர். சென்னை நகர மக்கள் தொகை மாறாமலிருக்கிறது என்றும் பயணிகளில் அடுத்த ஆண்டில் 60% பேர் புதிய போக்குவரத்து வசதியையும் 40% பேர் மெட்ரோ ரயில் வண்டியையும் பயன்படுத்துவார்கள் எனக் கொண்டால்,
- (i) அதற்கு அடுத்த ஆண்டில் எத்தனை சதவீதம் பயணிகள் புதிய போக்குவரத்து வசதியை பயன்படுத்துவார்கள் என எதிர்பார்க்கலாம்?
- (ii) காலப்போக்கில் எத்தனை சதவீதம் பேர் புதிய போக்குவரத்து வசதியைப் பயன்படுத்துவர்?

**பதில் :** (i) மாறுதல் நிகழ்தகவு அணி

$$T = \begin{matrix} S & M \\ \begin{pmatrix} .7 & .3 \\ .3 & .7 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

தொடக்க நிலை = (.6 .4)

ஓராண்டிற்கு பிறகு

$$(.6 \ .4) \begin{pmatrix} .7 & .3 \\ .3 & .7 \end{pmatrix} = (.42+.12 \ .18+.28)$$

$$= (.54 \ .46)$$

ஓராண்டிற்குப் பிறகு 54% பேர் புதிய போக்குவரத்து வசதியையும் , 46% பேர் மெட்ரோ ரயிலையும் பயன்படுத்துவர் .

(ii) சமநிலையில் ,

$$(S \ M) \begin{pmatrix} .7 & .3 \\ .3 & .7 \end{pmatrix} = (S \ M)$$

$$(.7S + .3M \ .3S + .7M) = (S \ M)$$

$$(.7S + .3M) = S \quad [\text{இதில் } S + M = 1, M = 1 - S]$$

$$.7S + .3(1 - S) = S$$

$$.7S + .3 - .3S = S$$

$$0.3 = S - .4S$$

$$0.3 = 0.6S$$

$$S = 3/6 = 1/2 = 0.5 \quad \text{மற்றும் } M = 1 - 0.5 = 0.5$$

∴ காலப்போக்கில் 50% பேர் புதிய போக்குவரத்து வசதியைப் பயன்படுத்துவர் .

25) கீழ்க்காணும் சமன்பாடுகளை கிரேமரின் விதியைப் பயன்படுத்தி தீர்க்க.

$$2x + y - z = 3, \quad x + y + z = 1, \quad x - 2y - 3z = 4$$

**பதில் :**  $2x + y - z = 3,$

$$x + y + z = 1,$$

$$x - 2y - 3z = 4$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 2$$

$$= 2(-3+2) - 1(-3-1) - 1(-2-1)$$

$$= 2(-1) - 1(-4) - 1(-3)$$

$$= -2 + 4 + 3 = 5.$$

$$\Delta \neq 0,$$

கிரேமரின் விதியைப் பயன்படுத்தலாம்

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix}}{\Delta} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-3 + 2) - 1(-3 - 4) - 1(-2 - 4)$$

$$= 3(-1) - 1(-7) - 1(-6)$$

$$= -3 + 7 + 6 = 10.$$

$$\Delta y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix}}{\Delta} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-3 - 4) - 3(-3 - 1) - 1(4 - 1)$$

$$= 2(-7) - 3(-4) - 1(3)$$

$$= 14 + 12 - 3 = -5$$

$$\Delta z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

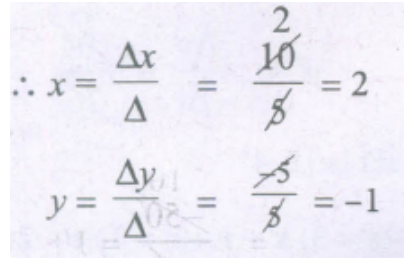
$$= 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 2(4 + 2) - 1(4 - 1) + 3(-2 - 1)$$

$$= 2(6) - 1(3) + 3(-3)$$

$$= 12 - 3 - 9$$

$$= 0$$



$\therefore x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{10}{5} = 2$

$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-5}{5} = -1$

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{0}{5} = 0$$

$$\therefore \text{தீர்வு : } \{x, y, z\} = \{2, -1, 0\}$$