QB365 Question Bank Software Study Material

ஈருறுப்புத் தேற்றம், தொடர்முறைகள் மற்றும் தொடர்கள் முக்கியமான 2,3 & 5 மதிப்பெண் வினாக்கள் விடைகளுடன்(புத்தக & ஆக்கபூர்வமான வினாக்கள்)

11ம் வகுப்பு

கணிதம்

மொத்த மதிப்பெண் : 75

2 மதிப்பெண் வினாக்கள்

10 x 2 = 20

1) 98^4 -ன் மதிப்பினைக் காண்க .

பதில் : $(a-b)^n$ -ன் ஈருறுப்பு விரிவில் a = 100, b = 2 மற்றும் n = 4 எனப் பிரதியிட

$98^4 = (100 - 2)^4$

$= {}^4C_0 100^4 - {}^4C_1 100^3 2 + {}^4C_2 100^2 2^2 - {}^4C_3 100^1 2^3 + {}^4C_4 100^0 2^4$

= 100000000 - 8000000 + 240000 - 3200 + 16

= 92236816.

2) $(x+y)^6$-ன் விரிவில் மைய உறுப்பினைக் காண்க .

பதில் : இங்கு n = 6 இது இரட்டைப்படை எண். எனவே ,$(x+y)^6$ -ன் விரிவில் மைய உறுப்பு $x^{\frac{6}{2}}y^{\frac{6}{2}}$ ஐக் கொண்ட உறுப்பு. அதாவது, x^3y^3 ஐ கொண்ட உறுப்பு எனவே அந்த மைய உறுப்பு ${}^6C_3x^3y^3 = 20^3y^3$ ஆகும்.

3) தொடர்முறைகளின் n ஆவது உறுப்பு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. அவற்றின் முதல் 6 உறுப்புகளைக் காண்க . மேலும், அந்த தொடர் முறைகள், கூட்டுத்தொடர்முறை , பெருக்குத்தொடர்முறை, இசைத்தொடர்முறை , கூட்டு-பெருக்குத்தொடர்முறை மற்றும் இவற்றில் எதுவுமில்லை என வகைப்படுத்துக. $\frac{1}{2^{n+1}}$.

பதில் : $a_n=\frac{1}{2^{n+1}}$

$a_1 = \frac{1}{2^{1+1}} = \frac{1}{2^2}$

$a_2 = \frac{1}{2^{2+1}} = \frac{1}{2^3}$

$a_3 = \frac{1}{2^{3+1}} = \frac{1}{2^4}$

$a_4 = \frac{1}{2^{4+1}} = \frac{1}{2^5}$

$a_5 = \frac{1}{2^{5+1}} = \frac{1}{2^6}$

$a_6 = \frac{1}{2^{6+1}} = \frac{1}{2^7}$

$\therefore$ முதல் 6 உறுப்புகள் $=\frac{1}{2^2},\frac{1}{2^3},\frac{1}{2^4},\frac{1}{2^5},\frac{1}{2^6},\frac{1}{2^7}$

$a_1=\frac{1}{2^2}$ மற்றும் $r=\frac{1}{2^3} \div \frac{1}{2^2} = \frac{2^2}{2^3} = \frac{1}{2}$

$r=\frac{1}{2^4} \div \frac{1}{2^3} = \frac{2^3}{2^4} = \frac{1}{2}$

$\therefore$ இந்தத் தொடர் ஓர் பெருக்குத்தொடர் ஆகும்.

4) தொடர்முறைகளின் n ஆவது உறுப்பு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. அவற்றின் முதல் 6 உறுப்புகளைக் காண்க . மேலும், அந்த தொடர் முறைகள், கூட்டுத்தொடர்முறை , பெருக்குத்தொடர்முறை, இசைத்தொடர்முறை , கூட்டு-பெருக்குத்தொடர்முறை மற்றும் இவற்றில் எதுவுமில்லை என வகைப்படுத்துக$\frac{(n+1)(n+2)}{n+3(n+4)}$.

பதில் : $a_n=\frac{(n+1)(n+2)}{n+3(n+4)}$

$a_1 = \frac{(1+1)(1+2)}{(1+3(1+4)} = \frac{2\times3}{4\times5} = \frac{3}{10}$

$a_2 = \frac{(2+1)(2+2)}{(2+3(2+4)} = \frac{3\times3}{5\times6} = \frac{2}{5}$

$a_3 = \frac{(3+1)(3+2)}{(3+3(3+4)} = \frac{4\times5}{6\times7} = \frac{10}{21}$

$a_4 = \frac{(4+1)(4+2)}{(4+3(4+4)} = \frac{5\times6}{7\times8} = \frac{15}{28}$

$a_5 = \frac{(5+1)(5+2)}{(5+3(5+4)} = \frac{6\times7}{8\times9} = \frac{7}{12}$

$a_6 = \frac{(6+1)(6+2)}{(6+3(6+4)} = \frac{7\times8}{9\times10} = \frac{28}{45}$

$\therefore$ முதல் 6 உறுப்புகள் $=\frac{3}{10},\frac{2}{5},\frac{10}{21},\frac{15}{28},\frac{7}{12},\frac{28}{45}$ . ...

இது கூட்டுத் தொடர், பெருக்குத் தொடர் மற்றும் இசைத்தொடர்முறை எதுவுமில்லை.

5) தொடர்முறைகளின் n ஆவது உறுப்பு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. அவற்றின் முதல் 6 உறுப்புகளைக் காண்க . மேலும், அந்த தொடர் முறைகள், கூட்டுத்தொடர்முறை , பெருக்குத்தொடர்முறை, இசைத்தொடர்முறை, கூட்டு-பெருக்குத்தொடர்முறை மற்றும் இவற்றில் எதுவுமில்லை என வகைப்படுத்துக $4\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

பதில் : $a_n = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$
$a_1 = 4\left(\frac{1}{2}\right)^1 = 2$
$a_2 = 4\left(\frac{1}{2}\right)^2$
$a_3 = 4\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$
$a_4 = 4\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$
$a_5 = 4\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{8}$
$a_6 = 4\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{16}$
∴ தொடர்: $2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$
a =1 மற்றும் r =$\frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_2} = \frac{1}{2}$
எனவே இது ஒரு பெருக்குத்தொடர்முறை

6) தொடர்முறைகளின் n ஆவது உறுப்பு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. அவற்றின் முதல் 6 உறுப்புகளைக் காண்க . மேலும், அந்த தொடர் முறைகள், கூட்டுத்தொடர்முறை , பெருக்குத்தொடர்முறை, இசைத்தொடர்முறை , கூட்டு-பெருக்குத்தொடர்முறை மற்றும் இவற்றில் எதுவுமில்லை என வகைப்படுத்துக $\frac{(-1)^n}{n}$.

பதில் : $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ என்க
$a_1 = \frac{(-1)^1}{1} = -1$
$a_2 = \frac{(-1)^2}{2} = \frac{1}{2}$
$a_3 = \frac{(-1)^3}{3} = \frac{-1}{3}$
$a_4 = \frac{(-1)^4}{4} = \frac{1}{4}$
$a_5 = \frac{(-1)^5}{5} = \frac{-1}{5}$
$a_6 = \frac{(-1)^6}{6} = \frac{1}{6}$
∴ தொடர் $-1, \frac{1}{2}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{-1}{5}, \frac{1}{6}$
ie 1,2,3,4,.......
d =2-1=3-2=1 ∴ இது ஒரு A.P
-1,1,-1,1,-1........
r=$\frac{1}{-1} = \frac{-1}{1}$=-1 ∴ இது ஒரு G.P யும் ஆகும்.
எனவே கூட்டு பெருக்குத்தொடர் ஆகும்.

7) தொடர்முறைகளின் n ஆவது உறுப்பு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. அவற்றின் முதல் 6 உறுப்புகளைக் காண்க . மேலும், அந்த தொடர் முறைகள், கூட்டுத்தொடர்முறை , பெருக்குத்தொடர்முறை, இசைத்தொடர்முறை , கூட்டு-பெருக்குத்தொடர்முறை மற்றும் இவற்றில் எதுவுமில்லை என வகைப்படுத்துக $\frac{2n+3}{3n+3}$

பதில் : $a_n = \frac{2n+3}{3n+4}$ என்க.
$a_1 = \frac{2+3}{3+4} = \frac{5}{7}$
$a_2 = \frac{4+3}{6+4} = \frac{7}{10}$
$a_3 = \frac{6+3}{9+4} = \frac{9}{13}$
$a_4 = \frac{8+3}{12+4} = \frac{11}{16}$
$a_5 = \frac{10+3}{15+4} = \frac{13}{9}$
$a_6 = \frac{12+3}{18+4} = \frac{15}{22}$
∴ தொடர் =$\frac{5}{7}, \frac{7}{10}, \frac{9}{13}, \frac{11}{16}, \frac{13}{19}, \frac{15}{22}$ இது ஒரு AP-யும் அல்ல, இது ஒரு GP-யும் அல்ல. எது ஒரு AGP-யும் அல்ல.

8) தொடர்முறைகளின் n ஆவது உறுப்பு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. அவற்றின் முதல் 6 உறுப்புகளைக் காண்க . மேலும், அந்த தொடர் முறைகள், கூட்டுத்தொடர்முறை , பெருக்குத்தொடர்முறை, இசைத்தொடர்முறை , கூட்டு-பெருக்குத்தொடர்முறை மற்றும் இவற்றில் எதுவுமில்லை என வகைப்படுத்துக :2018

பதில் : an =2018 என்க.முதல் 6 உறுப்புகள் =2018, 2018, 2018, 2018, 2018, 2018
இங்கு பொது வித்தியாசம், பொது விகிதம் சமமாக உள்ளதால் இது A.P, G..P, AGPஆகும்.

9) n - ஆவது உறுப்பு an ஐக் கொண்ட பின்வரும் தொடர்முறைகளின் முதல் 6 உறுப்புகளைக் காண்க .

$$a_n = \begin{cases} n & ;\ n \text{ என்பது } 1, 2, \text{ அல்லது } 3 \text{ எனில்} \\ a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} & ;\ n > 3 \end{cases}$$

பதில் : $a_1=1$

$a_2=2$

$a_3=3$

$a_4=a_1+a_2+a_3=3+2+1=6$

$a_5=a_2+a_3+a_4=6+3+2=11$

$a_6=a_3+a_4+a_5=11+6+3=20$

முதல் 6 உறுப்புகள் 1,2,3,6,11,20,....

10) பின்வரும் தொடர்முறைகளின் n-ஆவது உறுப்பு காண்க 6, 10, 4, 12, 2, 14, 0, 16, -2, . . .

பதில் : 6,10,4,12,2,14,0,16,-2,...

ஒற்றை உறுப்புகள் = 6,4,2,0,-2

$t_n=6+(n-1)(-2)=6-21+2$

$=8-2n$

இரட்டை உறுப்புகள் = 10,12,14,16,...

$\therefore t_n=10+(n-1)^2=10+2n-2$

$= 8 + 2n$

$$n\text{-ம் உறுப்பு} = \begin{cases} 8-2n & ; n \text{ ஒற்றைப்படை எனில்} \\ 8+2n & ; n \text{ இரட்டைப்படை எனில்} \end{cases}$$

3 மதிப்பெண் வினாக்கள் — 10 x 3 = 30

11) $1+\frac{4}{5}+\frac{7}{25}+\frac{10}{125}+$-ன் கூடுதல் காண்க.

பதில் : இங்கு, a = 1 , d = 3 மற்றும் r=$\frac{1}{5}$

$S_\infty=\frac{a}{1-r}+\frac{dr}{(1-r)^2}$

$=\frac{1}{1-\frac{1}{5}}+\frac{3\times\frac{1}{5}}{(1-\frac{1}{5})^2}$

$=\frac{5}{4}+\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{25}{16}\right)$

$=\frac{35}{26}$

12) |x|< 1 என்ற மதிப்பிற்கு,$(1+x)^{\frac{2}{3}}$ ஐ முதல் நான்கு உறுப்புகள் வரை விரிவுபடுத்தி எழுதுக.

பதில் : இங்கு,$n=\frac{2}{3}$

$\frac{n(n-1)}{2!}=\frac{\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}-1\right)}{2!}$

$=\frac{\frac{2}{3}\left(\frac{-1}{3}\right)}{2}$

$=\frac{-1}{9}$

$\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}=\frac{\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}-1\right)\left(\frac{2}{3}-2\right)}{3!}$

$=\frac{\frac{2}{3}\left(\frac{-1}{3}\right)\left(\frac{-4}{3}\right)}{6}$

$=\frac{4}{81}$

இதனால், $(1+x)^{\frac{2}{3}}=1+\frac{2}{3}x-\frac{1}{9}x^2+\frac{4}{81}x^3+\ldots$

13) ஈருறுப்புத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி $(1.01)^{1000000}$ மற்றும் 10000 ஆகியவற்றில் எது பெரியது எனக் காண்க .

பதில் : $(1.01)^{1000000}-10000$

$= (1+.01)^{1000000}\ 10,000$

$= {}^{100000}C_0+{}^{1000000}C_1(.01)+{}^{1000000}C_2(.01)^2+\ldots+(.01)^{1000000}-10,000$

=(1+1000000 x (.01) + **சாதகமான எண்**)-10,000

= 1 + **சாதகமான எண்**

$\therefore (1.01)^{1000000}-10,000 > 0$

$\Rightarrow (1.01)^{1000000} > 10,000.$

14) பின்வருவனவற்றை x-ன் அடுக்குகளாக விரிவாக்கம் செய்க. அந்த விரிவு ஏற்புடையதாக இருப்பதற்கான x -ன் நிபந்தனையைக் காண்க

$\frac{2}{(3+4x)^2}$

பதில் : $\frac{2}{(3+4x)^2}=\frac{1}{3^2\left(1+\frac{4x}{3}\right)^2}$

$=\frac{1}{9}\left(1+\frac{4x}{3}\right)^{-2}$

$=\frac{1}{9}(1+y)^{-2}$ $y=\frac{4x}{3}$

$=\frac{1}{9}(1-2y+3y^2-4y^3+5y^4+....)$

$\frac{1}{(3+4x)^2}=\frac{1}{9}\left(1-2\left(\frac{4x}{3}\right)+3\left(\frac{4x}{3}\right)^2-4\left(\frac{4x}{3}\right)^3+\ldots\right)$

$\frac{2}{(3+4x)^2}=\frac{2}{9}\left(1-2\left(\frac{4x}{3}\right)+3\left(\frac{4x}{3}\right)^2-4\left(\frac{4x}{3}\right)^3+\ldots\right)$

விரிவு ஏற்புடையதாக இருக்க $|y|<1$ ஆக இருக்க வேண்டும். $y=\frac{4x}{3}$

$\therefore$ விரிவு ஏற்புடையதாக இருக்க வேண்டுமெனில் $\left|\frac{4x}{3}\right|<1\Rightarrow|x|<\frac{3}{4}$. ஆக இருக்க வேண்டும்.

15) பின்வருவனவற்றை x-ன் அடுக்குகளாக விரிவாக்கம் செய்க. அந்த விரிவு ஏற்புடையதாக இருப்பதற்கான x -ன் நிபந்தனையைக் காண்க.
$(5+x^2)^{2/3}$.

பதில் : $(1+x)^{\frac{p}{q}}=\left[1+\frac{p}{q}x+\frac{\frac{p}{q}\left(\frac{p}{q}-1\right)}{2!}x^2+\frac{\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p}{q}-1\right)\left(\frac{p}{q}-2\right)}{3!}x^2+\ldots\right]$

$=5^{\frac{2}{3}}\left(1+\frac{x^2}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$

$=5^{\frac{2}{3}}\left(1+\frac{2}{3}\left(\frac{x^2}{5}\right)+\frac{\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}-1\right)}{2!}\left(\frac{x^2}{5}\right)^2+\frac{\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}-1\right)\left(\frac{2}{3}-2\right)}{3!}\left(\frac{x^2}{5}\right)^3+\ldots\right)$

$=5^{\frac{2}{3}}\left[1+\frac{2x^2}{15}+\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{-1}{3}\right).\frac{x^4}{50}+\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{-1}{3}\right)\left(\frac{-2}{3}\right)\frac{x^6}{125\times6}+....\right]$

$=5^{\frac{2}{3}}\left[1+\frac{2x^2}{5}-\frac{2x^2}{9\times50}+\frac{4}{3\times3\times3}\frac{x^6}{125\times6}....\right]$

$=5^{\frac{2}{3}}\left[1+\frac{2x^2}{5}-\frac{x^4}{225}+\frac{2x^6}{10125}.....\right]$.

இந்த விரிவு ஏற்புடையதாக இருக்க வேண்டுமெனில் $\left|\frac{x^2}{5}\right|<1\Rightarrow x^2<5$ இருக்க வேண்டும்.

16) பின்வரும் அடுக்குறித் தொடரில் முதல் 6 உறுப்புகளைக் காண்க. e^{-2x}.

பதில் : $\because e^{-x}=1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots$

$\Rightarrow e^{-2x}=1-\frac{2x}{1!}+\frac{(2x)^2}{2!}-\frac{(2x)^3}{3!}+\frac{(2x)^4}{4!}-\frac{(2x)^5}{5!}+..$

$=1-2x+2x^2\frac{4x^3}{3}+\frac{2x^4}{3}-\frac{4x^5}{15}+....$

17) பின்வரும் மடக்கைத் தொடர்களின் முதல் 4 உறுப்புகளைக் காண்க $\log(1-2x)$ இந்த விரிவுகள் ஒவ்வொன்றும் எந்த இடைவெளியில் ஏற்புடையது எனவும் காண்க.

பதில் : $\log(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...$

$\therefore\log(1-2x)=-(2x)-\frac{(2x)^2}{2}-\frac{(2x)^3}{3}-\frac{(2x)^4}{4}+\frac{(2x)^5}{5}-\frac{(2x)^6}{6}+\ldots$

$\log(1-2x)=\frac{4x^2}{2}-\frac{8x^3}{3}-\frac{16x^3}{3}-\frac{32x^5}{5}-\frac{64x^6}{6}+\ldots$

தொடர் $|2x|<1\Rightarrow|x|<\frac{1}{2}$ ஆக இருக்கும் போது ஏற்புடையதாகிறது. $\therefore$ ஏற்புடையதாக இடைவெளி $-\frac{1}{2},\frac{1}{2}$

18) $y=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\ldots$எனில் $x=y+\frac{y^2}{2!}+\frac{y^3}{3!}+\frac{y^4}{4!}+\ldots$ என நிறுவுக

பதில் : $y=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\ldots$ என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

இருபுறமும் (-1) ஆல் பெருக்க

$\Rightarrow -y-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-....$

$\Rightarrow -y=\log(1-x)\ \left[\because\log(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\ldots\right]$

$\Rightarrow e^{-y}=(1-x)$

$\Rightarrow x=1-e^{-y}$

$\Rightarrow x=1-\left[1-\frac{y}{1!}+\frac{y^2}{2!}-\frac{y^3}{3!}+\frac{y^4}{4!}-....\right]$

$\Rightarrow x=1-1+\frac{y}{1!}-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^3}{3!}-\frac{y^4}{4!}+..$

$\Rightarrow x=y-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^3}{3!}-\frac{y^4}{4!}+...$

19) $\frac{3}{1^21^2},\frac{5}{2^23^2},\frac{7}{3^24^2},.....$என்ற தொடரின் n ஆவது உறுப்பினை இரு உறுப்புகளின் வித்தியாசமாக எழுதுக.

பதில் : தொகுதியில் உள்ள உறுப்புகள் 3,5,7....AP.

$\therefore t_n=3+(n-1)^2=2n+1$

பகுதியில் உள்ள உறுப்புகள்$=1^2 2^2, 2^2 3^2, 3^2 4^2,...$ [a=3,d=2]

$\therefore t_n=[n(n+1)]^2$

$\therefore$ n-ம் உறுப்பு

$=\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\frac{n^2+2n+1-n^2}{n^2(n+1)^2}=\frac{(n+1)^2-n^2}{n^2(n+1)^2}$

$=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}$.

20) $1,\frac{4}{3},\frac{7}{9},\frac{10}{27},\ldots$என்ற தொடர் முறையின் n ஆவது உறுப்பு மற்றும் முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதல் காண்க.

பதில் : கொடுக்கப்பட்ட கூட்டுத் தொடர் தொகுதியில் உள்ள உறுப்புகள் =1,4,7,10,....

a =1, d =3

$\therefore$ n வது உறுப்பு =1+(n-1)3

=3n-2

பகுதியில் உள்ள உறுப்புகள் =3,9,2,7

$r=\frac{1}{3}$

$S_n=\frac{a-(a+(n-1)d)r^n}{1-r}+dr\left(\frac{1-r^{n-1}}{(1-r)^2}\right)$

$=\frac{1-[1+(n-1)3]\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}+\frac{1-[1+(3n-3)]\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}}$

$=\frac{1-\frac{3n-2}{3n}}{\frac{2}{3}}+3\times\frac{1}{3}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2}\right)$

$\Rightarrow\frac{3^n-3^{n+2}}{3^{n-1}.2}+\frac{3^{n-1}-1}{4.3^{n-3}}$.

5 மதிப்பெண் வினாக்கள் 5 x 5 = 25

21) எல்லா மிகை முழு எண் n-க்கும் 6^n - 5n ஐ 25 ஆல் வகுக்க மீதி 1 என்பதை ஈருறுப்புத் தேற்றத்தின் மூலம் நிறுவுக.

பதில் : இதை நிறுவ, 6^n - 5n = 25k + 1, k என்பது ஒரு இயல் எண், என நிறுவினால் போதுமானது

எனில், $(1+x)^6={}^nC_0+{}^nC_1x+{}^nC_2x^2+\ldots..+{}^nC_{n-1}x^{n-1}+{}^nC_nx^n, n\epsilon N$

x = 5 என எடுத்துக் கொள்ள ,$(1+5)^n={}^nC_0+{}^nC_15+{}^nC_25^2+\ldots..+{}^nC_{n-1}5^{n-1}+{}^nC_n5^n$என கிடை க்கும்

மேலே உள்ள சமன்பா டு,$6^n=1+5x+25({}^nC_2+{}^nC_35+\ldots\ldots+{}^nC_n5^{n-2})$என மாறும்.

அதாவது,$6^n-5=1++25({}^nC_2+{}^nC_35+\ldots\ldots+{}^nC_n5^{n-2})1+25k, k\epsilon N$

இதிலிருந்து, 6^n - 5n ஐ 25 ஆல் வகுக்கும் போது மீதி 1 என அறியலாம். இது எல்லா இயல் எண் 'n'-க்கும் பொருந்தும்.

22) x ஒரு பெரிய எண் எனில் $\sqrt[3]{x^3+7}-\sqrt[3]{x^3+4}$ ன் மதிப்பு தோராயமாக $\frac{1}{x^2}$ என நிறுவுக.

பதில் : $\sqrt[3]{x^3+7}=(x^3+7)^{\frac{1}{3}}$

$=\left[x^3\left(1+\frac{7}{x^3}\right)\right]^{\frac{1}{3}}$ (x பெரிய எண் என்பதால் $\left|\frac{7}{x^3}\right|<1$)

$=x\left(1+\frac{7}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}}$

$=x\left(1+\frac{1}{3}\times\frac{7}{x^3}+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\left(\frac{7}{x^3}\right)^2+\ldots.\right)$

$=x\left(1+\frac{7}{3}\times\frac{1}{x^3}-\frac{49}{9}\times\frac{1}{x^6}+\ldots.\right)$

$=x+\frac{7}{3}\times\frac{1}{x^2}-\frac{49}{9}\times\frac{1}{x^6}+\ldots\ldots$

$\sqrt[3]{x^3+4}=(x^3+4)^{\frac{1}{3}}$

$=\left[x^3\left(1+\frac{4}{x^3}\right)\right]^{\frac{1}{3}}$ (x பெரிய எண் என்பதால் $\left|\frac{4}{x^2}\right|<1$)

$=x\left(1+\frac{4}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}}$

$=x\left(1+\frac{1}{3}\times\frac{4}{x^3}+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\left(\frac{4}{x^3}\right)^2+\ldots.\right)$

$=x\left(1+\frac{4}{3}\times\frac{1}{x^3}-\frac{16}{9}\times\frac{1}{x^6}+\ldots.\right)$

$=x+\frac{4}{3}\times\frac{1}{x^2}-\frac{16}{9}\times\frac{1}{x^6}+\ldots\ldots$

x ஒரு பெரிய எண் என்பதால் $\frac{1}{x}$ மிகச் சிறிய எண்ணாக இருக்கும். எனவே$\frac{1}{x}$ -ன் உயர் அடுக்குகள் நீக்கப்படலாம்.

எனவே $\sqrt[3]{x^3+7}=x+\frac{7}{3}\times\frac{1}{x^2}$ மற்றும் $\sqrt[3]{x^3+4}=x+\frac{4}{3}\times\frac{1}{x^2}$.

அதனால்$\sqrt[3]{x^3+7}-\sqrt[3]{x^3+4}=\left(x+\frac{7}{3}\times\frac{1}{x^2}\right)-\left(x+\frac{4}{3}\times\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{x^2}$

23) $\left(x^2-\frac{1}{x^3}\right)^6$ -ன் விரிவில் x^6 மற்றும் x^2 -ன் கெழுக்களைக் காண்க .

பதில் : $\left(x^2-\frac{1}{x^3}\right)^6$, n=6, $x=x^2$, $a=\frac{-1}{x^3}$

$\therefore$ பொது உறுப்பு $\Rightarrow T_{r+1}={}^nC_r x^{n-r} a^r$

$\Rightarrow T_{r+1}={}^6C_r (x^r)^{6-r} \left(\frac{-1}{x^3}\right)^r$

$=(-1)^r\,{}^6C_r x^{12-5r}$ ...(1)

x^6 ன் கெழுவினைக்கான 12-5r=6 எனக் கொள்க.

12-5r=6 $\Rightarrow$ 12-6=5r $\Rightarrow$ 6=5r

$r=\frac{6}{5}$ இங்கு x^6 இருக்கமுடியாது

x^2-ன் கெழுவைக் காண 12-5r=2 என பிரதியிட

12-5r=2

$\Rightarrow$ 12-2=5r $\Rightarrow$ 10=5r $\Rightarrow$ r=2

r=2 என (1) ல் பிரதியிட

$T_3=(-1)^2\,{}^6C_2 x^{12-10}=\frac{6\times5}{2\times1}x^2=15x^2$

$\therefore$ x^2 ன் கெழு =15

24) மிகை முழு எண் அடுக்குக்கான ஈருறுப்புத் தேற்றம்
ஏதேனும் ஒரு இயல் எண் n-க்கு,$(a+b)^n={}^n\mathrm{C}_0a^nb^0+{}^n\mathrm{C}_1a^{n-1}b^1+\cdots+{}^n\mathrm{C}_ra^{n-r}b^r+\cdots+{}^n\mathrm{C}_na^0b^n$ ஆகும்.

பதில் : கணிதத் தொகுத்தறிதல் மூலம் இந்தத் தேற்றத்தை நிரூபிக்கலாம். ஏதேனும் ஒரு மிகை முழு எண் n-க்கு, P(n) என்பது
$(a+b)^n={}^n\mathrm{C}_0a^nb^0+{}^n\mathrm{C}_1a^{n-1}b^1+\cdots+{}^n\mathrm{C}_ra^{n-r}b^r+\cdots+{}^n\mathrm{C}_na^0b^n$
${}^1C_0$ = 1 மற்றும் ${}^1C_1$ = 1; எனவே, P(1)-ன் வலப்பக்கம் $a^1b^0 + a^0b^1$ ஆகும். இது இடப்பக்கம் உள்ள $(a + b)^1$ - க்குச் சமம். இதனால் P(1)
மெய் ஆகும். ஏதேனும் ஒரு மிகை முழு எண் k-க்கு P(k) மெய் எனக் கொள்வோம். அதாவது,

$(a+b)^k={}^k\mathrm{C}_0a^kb^0+{}^k\mathrm{C}_1a^{k-1}b^1+\cdots+{}^k\mathrm{C}_ra^{k-r}b^r+\cdots+{}^k\mathrm{C}_ka^0b^k$

$(a + b)^{k+1} = (a + b)(a + b)^k$

$=(a+b)\left[{}^k\mathrm{C}_0a^kb^0+{}^k\mathrm{C}_1a^{k-1}b^1+\cdots+{}^k\mathrm{C}_ra^{k-r}b^r+\cdots+{}^k\mathrm{C}_ka^0b^k\right]$

$=\left[{}^k\mathrm{C}_0a^{k+1}b^0+{}^k\mathrm{C}_1a^kb^1+\cdots+{}^k\mathrm{C}_ra^{k-r+1}b^r+\cdots+{}^k\mathrm{C}_ka^1b^k\right]+\left[{}^k\mathrm{C}_0a^kb^1+{}^k\mathrm{C}_1a^{k-1}b^2+\cdots+{}^k\mathrm{C}_ra^{k-r}b^{r+1}+\cdots+{}^k\mathrm{C}_ka^0b^{k+}\right.$

$={}^k\mathrm{C}_0a^{k+1}b^0+\left[{}^k\mathrm{C}_1+{}^k\mathrm{C}_0\right]a^kb^1+\cdots+\left[{}^k\mathrm{C}_r+{}^k\mathrm{C}_{r-1}\right]a^{k-r+1}b^r+\cdots+\left[{}^k\mathrm{C}_k+{}^k\mathrm{C}_{k-1}\right]a^1b^k+{}^k\mathrm{C}_ka^0b^{k+1}$

${}^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r$

$={}^{k+1}\mathrm{C}_0a^{k+1}b^0+{}^{k+1}\mathrm{C}_1a^kb^1+{}^{k+1}\mathrm{C}_2a^{k-1}b^2+\cdots+{}^{k+1}\mathrm{C}_ra^{k-r+1}b^r+\cdots+{}^{k+1}\mathrm{C}_ka^1b^k+{}^{k+1}\mathrm{C}_{k+1}a^0b^{k+1}$

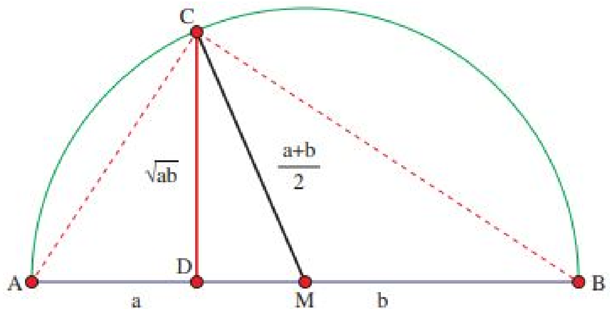
$(a+b)^{k+1}={}^{k+1}\mathrm{C}_0a^{(k+1)}b^0+{}^{k+1}\mathrm{C}_1a^{(k+1)-1}b^1+{}^{k+1}\mathrm{C}_2a^{(k+1)-2}b^2+\cdots+{}^{k+1}\mathrm{C}_ra^{(k+1)-r}b^r+\cdots+{}^{k+1}\mathrm{C}_ka^1b^{(k+1)-1}+{}^{k+1}\mathrm{C}_{k+1}a^0$

எனவே, P(k) மெய் எனில் P(k+1) மெய் ஆகும். இதனால் கணித தொகுத்தறிதல் மூலம் எல்லா இயல் எண் n-க்கும் P(n) மெய் என
நிரூபணமாகிறது. எனவே,

$(a+b)^n={}^n\mathrm{C}_0a^nb^0+{}^n\mathrm{C}_1a^{n-1}b^1+\cdots+{}^n\mathrm{C}_ra^{n-r}b^r+\cdots+{}^n\mathrm{C}_na^0b^n, n\in\mathbb{N}$

25) இரு குறையற்ற எண்களுக்கான கூட்டுச்சராசரி மற்றும் பெருக்குச் சராசரி முறையே AM மற்றும் GM என
குறிக்கப்படுமானால், AM $\geq$ GM . அந்த இரு எண்களும் சமமாக இருக்கும்போது AM = GM ஆக இருக்கும். அதன்
மறுதலையும் உண்மையாகும்.

பதில் : a மற்றும் b என்பன ஏதேனும் இரு குறையற்ற எண்கள் என்க. இப்போது $AM = \frac{a+b}{2}, GM = \sqrt{ab}$ ஆகும்.
$(a + b)^2 - 4ab = (a - b)^2 \geq 0$. அதனால், $(a + b)^2 - 4ab \geq 0$.
இதிலிருந்து, $(a + b) \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$
அதாவது AM$\geq$GM. மேலும், AM = GM $\Leftrightarrow (a + b)^2 - 4ab = 0 \Leftrightarrow (a - b)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b$ எனவே AM = GM ஆக இருக்கும்.
AM $\geq$ GM - க்கான வடிவ கணித விளக்கம்
a மற்றும் b என்பன ஏதேனும் இரு குறையற்ற மெய்யெண்கள் என்க. இவற்றில் ஏதேனும் ஒன்று பூஜ்ஜியமாக இருந்தால் GM பூஜ்ஜியமாகும். எனவே, நிரூபிக்க ஏதுமில்லை. நாம் a > 0 மற்றும் b > 0 என கொள்வோம். a + b நீளம் கொண்ட AB என்ற ஒரு நேர்க்கோட்டுத்துண்டு வரைந்து, AB ஐ விட்டமாகக் கொண்ட ஒரு அரைவட்டம் வரைக. M என்பது AB-ன் நடுப்புள்ளி என்க. எனவே, அரைவட்டத்தின் மையம் M ஆகும். M என்பது AB-ன் நடுப்புள்ளி என்பதால், $AM = MB = \frac{a+b}{2}$.
எனவே, வட்டத்தின் ஆரம் $\frac{a+b}{2}$ ஆகும்.
AD = a, DB = b எனுமாறு D என்ற புள்ளியை AB-ன் மீது எடுத்துக்கொள்க.



D வழியாக AB-க்கு செங்குத்து கோடு வரைக. அது அரை வட்டத்தை C என்ற புள்ளியில் சந்திக்கும் என்க. CA, CB மற்றும் CM என்ற கோடுகளை வரைக. M ஆனது அரைவட்டத்தின் மையம் என்பதால் CM = ஆரம் = $\frac{a+b}{2}$, MD = $\frac{a+b}{2}$- a என்பது தெளிவாகும். ΔACD மற்றும் ΔCBD என்பன ஒத்த முக்கோணங்கள் என்பதால், $\frac{CD}{AD} = \frac{BD}{CD}$ எனவே, $CD^2 = AD \times BD = ab$
மேலும், CD =$\sqrt{ab}$ (பிதாகரஸ் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தியும் CD = $\sqrt{ab}$ என நிறுவலாம்.) ஒரு அரை நாணின் நீளம் எப்போதும் ஆரத்தைவிட குறைவாக அல்லது சமமாக இருக்கும் என்பதால், CD $\leq$ CM அல்லது $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$. அதாவது, AM $\geq$ GM .
D ஆனது M-ல் அமையும் போது அரைநாண் DC ஆனது ஆரத்திற்கு சமமாக மாறும். அதன் மறுதலையும் உண்மையாகும். அதாவது, AM=GM எனில், a = b மற்றும் a = b எனில் AM=GM ஆகும்.