

QB365 Question Bank Software Study Material

தொகை நுண்கணிதம் முக்கியமான 2,3 & 5 மதிப்பெண் வினாக்கள் விடைகளுடன்(புத்தக & ஆக்கபூர்வமான வினாக்கள்)

11ம் வகுப்பு
கணிதம்

மொத்த மதிப்பெண் : 75

2 மதிப்பெண் வினாக்கள்

10 x 2 = 20

1) தொகையிடுக: $\frac{x^2}{x^3}$

பதில் : $\int \frac{x^2}{x^3} dx = \int \frac{1}{x} dx = \log|x| + c$

2) தொகையிடுக: $\frac{1}{x^7}$

பதில் : $\int \frac{1}{x^7} dx = \int x^{-7} dx = \frac{x^{-7+1}}{-7+1}$
 $= \frac{x^{-6}}{-6} + C = -\frac{1}{6x^6} + C$

3) தொகையிடுக: $(1+x^2)^{-1}$

பதில் : $\int (1+x^2)^{-1} dx = \int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x + c$

4) கீழ்காண்பவற்றைத் தொகையிடுக: $5x^4$

பதில் : $\int 5x^4 dx = 5 \int x^4 dx = 5 \frac{x^{4+1}}{4+1} + c = 5 \left(\frac{x^5}{5} \right) + c = x^5 + c$

5) கீழ்காண்பவற்றைத் தொகையிடுக: $2\cos x - 4\sin x + 5\sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x$

பதில் : $\int (2\cos x - 4\sin x + 5\sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x) dx$
 $= 2 \int \cos x dx - 4 \int \sin x dx + 5 \int \sec^2 x dx + \int \operatorname{cosec}^2 x dx$
 $= 2\sin x + 4\cos x + 5 \tan x - \cot x + c.$

6) $f(x)=4x-5$ மற்றும் $f(2)=1$ எனில், $f(x)$ காண்க.

பதில் : $f(x) = 4x - 5$

$f(2) = 1$

இருபுறமும் தொகையீடு காண

$\int f'(x) dx = \int (4x - 5) dx$

$f(x) = 4 \int x dx - 5 \int dx = 4 \cdot \frac{x^2}{2} - 5x + c$

$f(x) = 2x^2 - 5x + c \dots(1)$

$f(2) = 1$

$\Rightarrow f(2) = 2(2)^2 - 5(2) + c$

$\Rightarrow 1 = 8 - 10 + c$

$\Rightarrow 1 = -2 + c$

$c = 3$

$c = 3$ என (1) - ல் பிரதியிட

$f(x) = 2x^2 - 5x + 3$

7) x - ஐப் பொறுத்து கீழ்காண்பவற்றைத் தொகையிடுக.

$\cos 3x \cos 2x$

பதில் : $I = \int \cos 3x \cos 2x dx$ எனக்

2ஆல் பெருக்கி 2 ஆல் வகுக்க

$I = \frac{1}{2} \int 2\cos 3x \cos 2x dx$

$= \frac{1}{2} \int \cos(3x + 2x) + \cos(3x - 2x) dx$

$[\because 2\cos A \cos B = \cos(A + B) + \cos(A - B)]$

$= \frac{1}{2} \int \cos 5x + \cos x dx = \frac{1}{2} [\int \cos 5x dx + \int \cos x dx]$

$= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin 5x}{5} + \sin x \right] + c$

8) x-ஐப் பொறுத்து கீழ்காண்பவற்றைத் தொகையிடுக.

$$\frac{1}{25-4x^2}$$

பதில் : $I = \int \frac{dx}{25-4x^2} = \int \frac{dx}{5^2-(2x)^2}$ என்க.

$t = 2x$ என்க.

$dt = 2 \cdot dx \Rightarrow \frac{dt}{2} = dx$

$\therefore I = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{5^2-t^2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2 \times 5} \log \left| \frac{5+t}{5-t} \right| + c$

$I = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{5^2-t^2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{20} \log \left| \frac{5+2x}{5-2x} \right| + c$ [$\because t=2x$]

9) x-ஐப் பொறுத்து கீழ்காண்பவற்றைத் தொகையிடுக.

$$\frac{1}{9x^2-4}$$

பதில் : $I = \int \frac{dx}{9x^2-4} = \int \frac{dx}{(3x)^2-2^2}$ என்க.

$t=3x \Rightarrow \frac{dt}{3} = dx$ என்க.

$I = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t^2-2^2}$

$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \log \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c$

$\therefore I = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2 \times 2} \log \left| \frac{t-2}{t+2} \right| + c$

$= \frac{1}{12} \log \left| \frac{3x-2}{3x+2} \right| + c$ [$\because t=3x$]

10) x - ஐப் பொறுத்து கீழ்காண்பவற்றைத் தொகையிடுக.

$$e^{-x} \cos 2x$$

பதில் : $I = \int e^{-x} \cos 2x$

$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2} [a \cos bx + b \sin bx] + c$

இங்கு $a = -1, b = 2$

$\therefore I = \int e^{-x} \cos 2x \, dx$

$= \frac{e^{-x}}{(-1)^2+2^2} [-\cos 2x + 2 \sin 2x] + c$

$= \frac{e^{-x}}{5} [2 \sin 2x - \cos 2x] + c$

3 மதிப்பெண் வினாக்கள்

10 x 3 = 30

11) x-ஐப் பொறுத்து கீழ்காண்பவற்றைத் தொகையிடுக.

$$e^{8-7x}$$

பதில் : $\int e^{8-7x} \, dx = \frac{e^{8-7x}}{(-7)} + c = \frac{1}{7} e^{8-7x} + c$

12) x-ஐப் பொறுத்து தொகையிடுக.

$$\frac{1}{\sqrt{1-(4x)^2}}$$

பதில் : $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1}(x) + c$

$\int \frac{dx}{\sqrt{1-(4x)^2}} = \frac{\sin^{-1}(4x)}{4} + c = \frac{1}{4} \sin^{-1}(4x) + c$

13) மதிப்பிடுக: $\int (x-3)\sqrt{x+2} \, dx$

பதில் : $\int (x-3)\sqrt{x+2} \, dx = \int (x+2-5)\sqrt{x+2} \, dx$

$= \int x+2\sqrt{x+2} \, dx - 5 \int \sqrt{x+2} \, dx$

$= \int (x+2)^{\frac{3}{2}} \, dx - 5 \int (x+2)^{\frac{1}{2}} \, dx$

$= \frac{(x+2)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - 5 \frac{(x+2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$

$= \frac{2}{5} (x+2)^{\frac{5}{2}} - \frac{10}{3} (x+2)^{\frac{3}{2}} + c.$

14) கீழ்காண்பவற்றை மதிப்பிடுக: $\int 2x\sqrt{1+x^2} \, dx$

பதில் : $\int 2x\sqrt{1+x^2} \, dx$

$1+x^2 = u$ எனில் $2x \, dx = du$

$\int 2x\sqrt{1+x^2} \, dx = \int \sqrt{u} \, du$

$= \int u^{\frac{1}{2}} \, du = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3} (1+x^2)^{\frac{3}{2}} + c$

15) பின்வருவனவற்றை மதிப்பிடுக. $\int \sec x \, dx$

பதில் : $\int \sec x dx = \int \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} dx = \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} dx$ என்க.

$\sec x + \tan x = u$ எனில் $(\sec^2 x + \sec x \tan x) dx = du$

ஆகவே, $I = \int \frac{1}{u} du = \log|u| + c = \log|\sec x + \tan x| + c$

எனில், $\int \sec x dx = \log|\sec x + \tan x| + c$

16) கீழ்காண்பவற்றைத் தொகையிடுக: $\frac{\sin 2x}{a^2 + b^2 \sin^2 x}$

பதில் : $I = \int \frac{\sin 2x}{a^2 + b^2 \sin^2 x} dx$ என்க

$u = a^2 + b^2 \sin^2 x$

$\Rightarrow du = b^2 2 \sin x \cdot \cos x dx$

$\Rightarrow du = b^2 \sin 2x dx \Rightarrow \frac{du}{b^2} = \sin 2x dx$

$I = \frac{1}{b^2} \int \frac{du}{u}$

$\therefore I = \frac{1}{b^2} \log|u| + c \Rightarrow I = \frac{1}{b^2} \log|a^2 + b^2 \sin^2 x| + c$

17) கீழ்காண்பவற்றைத் தொகையிடுக: $x^2 e^{5x}$

பதில் : $\int x^2 e^{5x} dx$.

பெர்னோலியின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த

$\int u dv = uv - u'v_1 + u''v_2$

$\int x^2 e^{5x} dx = (x^2) \left(\frac{e^{5x}}{5}\right) - (2x) \left(\frac{e^{5x}}{5^2}\right) + (2) \left(\frac{e^{5x}}{5^3}\right) - (0) \left(\frac{e^{5x}}{5^4}\right) + 0 + \dots + 0 + c$

$= \frac{x^2 e^{5x}}{5} - \frac{2x e^{5x}}{25} + \frac{2e^{5x}}{125} + c$

$dv = e^{5x} dx$	
$u = x^2$	$v = \frac{e^{5x}}{5}$
$u' = 2x$	$v_1 = \frac{e^{5x}}{5^2}$
$u'' = 2$	$v_2 = \frac{e^{5x}}{5^3}$
$u''' = 0$	$v_3 = \frac{e^{5x}}{5^4}$

18) x -ஐப் பொறுத்து கீழ்காண்பவற்றைத் தொகையிடுக.

$\frac{\log x}{(1 + \log x)^2}$

பதில் : $I = \int \frac{\log x}{(1 + \log x)^2} dx$ என்க

$t = \log x \Rightarrow x = e^t$ என்க

$\Rightarrow dx = e^t dt$

$\therefore I = \int \frac{t \cdot e^t}{(t+1)^2} dt = \int \frac{(t+1-1)e^t}{(t+1)^2} dt$

$= \int \left[\frac{t+1}{(t+1)^2} - \frac{1}{(t+1)^2} \right] e^t dt$

$= \int \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{(t+1)^2} \right) e^t dt$

$f(t) = \frac{1}{t+1} \Rightarrow f'(t) = \frac{-1}{(t+1)^2} dt$ என்க

$\therefore I$ ஆனது $\int e^t [f(t) + f'(t) dt] = e^t \cdot f(t)$ எனும் வடிவில் உள்ளது.

$\therefore I = e^t \cdot f(t) + c = e^t \left(\frac{1}{t+1} \right) + c$

$= e^{\log x} \cdot \left(\frac{1}{\log|x|+1} \right) + c$ [$\because t = \log x$]

$= x \left(\frac{1}{1 + \log|x|} \right) + c$

19) பின்வருவனவற்றின் தொகை காண்க. $x \log x$

பதில் : $I = \int x \log x dx$ என்க

$u = \log x; dv = x dx$

$du = \frac{1}{x} dx; v = \frac{x^2}{2}$

\therefore பகுதித் தொகையிடல் முறையில்

$\int u dv = uv - \int v du$

$\int x \log x dx = \frac{x^2}{2} \log x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx$

$\frac{x^2}{2} \log x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} \log x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + c$

$= \frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4} + c$

20) x - ஐப் பொறுத்து கீழ்காண்பவற்றைத் தொகையிடுக.

$e^{-4x} \sin 2x$

பதில் : $I = \int e^{-4x} \sin 2x \, dx$ என்க

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2} (a \sin bx - b \cos bx) + c$$

இங்கு $a = -4$, $b = 2$

$$\therefore I = \int e^{-4x} \sin 2x \, dx$$

$$= \frac{e^{-4x}}{(-4)^2+2^2} [-4 \sin 2x - 2 \cos 2x] + c$$

$$= \frac{-e^{-4x}}{20} [4 \sin 2x + 2 \cos 2x] + c$$

$$= -\frac{e^{-4x}}{10} [2 \sin 2x + \cos 2x] + c$$

5 மதிப்பெண் வினாக்கள்

5 x 5 = 25

- 21) ஒரு நபரின் உயரம் h செ.மீ மற்றும் எடை w கிகி. அவரின் எடையின் மாறும் வீதம் உயரத்தைப் பொருத்துத் தோராயமாக $\frac{dw}{dh} = 4.364 \times 10^{-5} h^2$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது எனில், எடையை உயரத்தின் சார்பாகக் காண்க. மேலும் ஒரு நபரின் உயரம் 150 செ.மீ-ஆக இருக்கும் போது எடையைக் காண்க.

பதில் : உயரத்தைப் பொறுத்து எடையின் மாறுவீதம்

$$\frac{dw}{dh} = 4.364 \times 10^{-5} h^2$$

$$w = \int 4.364 \times 10^{-5} h^2 \, dh$$

$$w = 4.364 \times 10^{-5} \left(\frac{h^3}{3}\right) + c$$

உயரம் பூஜ்ஜியம் எனும்போது அந்நபரின் எடை பூஜ்ஜியமாக இருக்கும் என்பது தெளிவு. தொடக்க நிபந்தனை $h=0$ எனும்போது $w=0$, என்பதை மேலே உள்ள சமன்பாட்டில் பிரதியிட்டால், தொகையீட்டு மாறிலியை c -ஐக் கணக்கிடலாம்.

$$w = 4.364 \times 10^{-5} \left(\frac{h^3}{3}\right) + c \Rightarrow c = 0$$

ஒரு நபரின் எடை மற்றும் உயரம் ஆகியவற்றிக்கிடையேயான தொடர்பானது

$$w = 4.364 \times 10^{-5} \left(\frac{h^3}{3}\right) \text{ ஆகும்}$$

$$h=150 \text{ செ.மீ எனில், } w = 4.364 \times 10^{-5} \left(\frac{150^3}{3}\right)$$

உயரம் $h=150$ செ.மீ எனும்போதும், எடை தோராயமாக $w = 49$ கிகி. ஆகும்.

- 22) மதிப்பிடுக: $\int \frac{x+3}{(x+2)^2(x+1)} \, dx$

பதில் : $\int \frac{x+3}{(x+2)^2(x+1)} \, dx = \int \frac{-2}{x+2} \, dx - \int \frac{1}{(x+2)^2} \, dx + \int \frac{2}{x+1} \, dx$ (பகுதி பின்னங்களாக பிரிக்க)

$$= -2 \int \frac{1}{x+2} \, dx - \int \frac{1}{(x+2)^2} \, dx + 2 \int \frac{1}{x+1} \, dx$$

$$= -2 \log |x+2| - \int (x+2)^{-2} \, dx + 2 \log |x+1| + c$$

$$= -2 \log |x+2| + \frac{1}{x+2} + 2 \log |x+1| + c.$$

- 23) பின்வருவனவற்றை மதிப்பிடுக. $\int \frac{1}{x \log x} \, dx$

பதில் : $I = \int \frac{1}{x \log x} \, dx$ என்க

$$\log x = u \text{ எனில் } \frac{1}{x} \, dx = du$$

$$\text{ஆகவே } I = \int \frac{du}{u} = \log |u| + c = \log |\log x| + c$$

$$\text{எனவே, } \int \frac{1}{x \log x} \, dx = \log |\log x| + c$$

- 24) x -ஐப் பொறுத்து கீழ்காண்பவற்றைத் தொகையிடுக.

$$e^x \sec x (1 + \tan x)$$

பதில் : $I = \int e^x \sec x (1 + \tan x) \, dx$

$$= \int e^x (\sec x + \sec x \tan x) \, dx$$

$$f(x) = \sec x \Rightarrow f'(x) = \sec x \tan x$$

$\therefore I$ ஆனது $\int e^x [f(x) + f'(x)] \, dx = e^x \cdot f(x)$ எனும் வடிவில் உள்ளது.

$$\therefore I = e^x \cdot \sec x + c$$

- 25) x - ஐப் பொறுத்து கீழ்காண்பவற்றைத் தொகையிடுக.

$$\frac{2x+3}{\sqrt{x^2+4x+1}}$$

பதில் : $I = \int \frac{(2x+3)}{\sqrt{x^2+4x+1}} dx$ என்க

$$2x + 3 = A \cdot \frac{d}{dx}(x^2 + 4x + 1) + B$$

$$\Rightarrow 2x + 3 = A(2x + 4) + B$$

x மற்றும் மாறிலி உறுப்புகளின் கெழுக்களை சமப்படுத்த

$$2 = 2A \Rightarrow A = 1$$

$$\text{மற்றும் } 3 = 4A + B$$

$$\Rightarrow 3 = 4 + B \Rightarrow 3 - 4 = B \Rightarrow B = -1$$

$$\therefore 2x + 3 = 1(2x + 4) - 1$$

$$\therefore I = \int \frac{(2x+3)}{\sqrt{x^2+4x+1}} dx - \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+1}}$$

$$= 2\sqrt{x^2 + 4x + 1} - \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+4-4+1}}$$

$$= 2\sqrt{x^2 + 4x + 1} - \int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2 - (\sqrt{3})^2}}$$

$$2\sqrt{x^2 + 4x + 1} - \log | + 2 + \sqrt{x^2 + 4x + 1} | + c$$

$$[\because \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \log |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C]$$