QB365 Question Bank Software Study Material

வகை நுண்கணிதம் எல்லைகள் மற்றும் தொடர்ச்சித் தன்மை முக்கியமான 2,3 & 5 மதிப்பெண் வினாக்கள் விடைகளுடன்(புத்தக & ஆக்கபூர்வமான வினாக்கள்)

11ம் வகுப்பு

கணிதம்

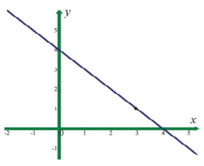
மொத்த மதிப்பெண் : 75

2 மதிப்பெண் வினாக்கள்

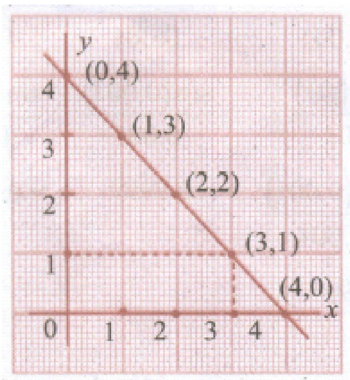
10 x 2 = 20

1) பின்வரும் கணக்குகளுக்கு வரைபடத்தைப் பயன்படுத்தி எல்லை மதிப்பைக் காண்க(உள்ளது எனில்). எல்லை மதிப்பு இல்லை எனில், காரணத்தை விளக்குக.

$\lim_{x\rightarrow 3}(4-x)$



பதில் :



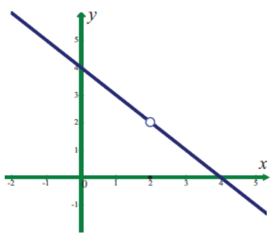
x = 3

எனும் பொழுது y = 1

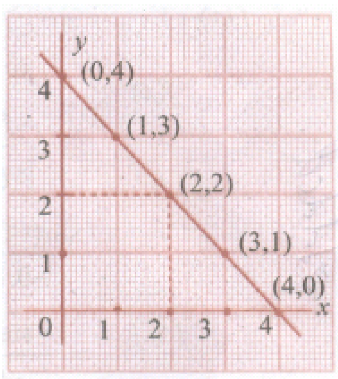
$\lim_{x\rightarrow 3}(4-x)=1$

2) பின்வரும் கணக்குகளுக்கு வரைபடத்தைப் பயன்படுத்தி எல்லை மதிப்பைக் காண்க(உள்ளது எனில்). எல்லை மதிப்பு இல்லை எனில், காரணத்தை விளக்குக.

$\lim_{x\rightarrow 2}f(x)$. இங்கு $f(x)=\begin{cases}4-x, & x\neq 2\\ 0, & x=2\end{cases}$



பதில் :



x = 2 எனும் பொழுது

y = 4 - 2 = 2

$\therefore \lim_{x\rightarrow 2}f(x)=2$

3) $\lim_{x\rightarrow 8}f(x)=25$ என்ற குறியீட்டு முறையின் பொருளைச் சுருக்கமாக விளக்குக.

பதில் : கொடுக்கப்பட்ட சார்பிற்கு எல்லை மதிப்பு உள்ளது.

$x\rightarrow 8$ என்பது x ஆனது 8 ஐ நெருக்கும்பொழுது சார்பின் மதிப்பு 25ஐ பெறுகிறது.

சார்பின் கீழ் (இடது எல்லை) மதிப்பு = வலது பக்க எல்லை மதிப்பு.

அதாவது

$\lim_{x\rightarrow 8^-}f(x)=\lim_{x\rightarrow 8^+}f(x)=25$

$\therefore f(8^-)=f(8^+)=-25$ ஆகும்.

4) ஏதேனும் ஒரு மெய்யெண் x_0 -க்கு $\lim_{x \to x_0} (5)$ -ன் மதிப்பைக் கணக்கிடுக.

பதில் : f(x)=5 ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை(படி 0).
எனவே,$\lim_{x \to x_0} (5) = f(x_0) = 5.$

5) கணக்கிடுக :$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

பதில் : இங்கு $\lim_{x \to 1} (x-1) = 0$ எனவே தொகுதியை விகிதப்படுத்துக.
$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-1)} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{\lim_{x \to 1}(1)}{\lim_{x \to 1}(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{2}$

6) கணக்கிடுக : $\lim_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x-1}$.

பதில் : $\lim_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^3-1^3}{x-1} = 3(1)^{3-1} = 3.$

7) பின்வரும் எல்லை மதிப்பினைக் காண்க: $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1-x}-1}{x^2}$

பதில் : $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1-x}-1}{x^2}$
தொகுதி, பகுதியை $\sqrt{1-x}+1$ ஆல் பெருக்க,
$= \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1-x}-1}{x^2} \times \frac{\sqrt{1-x}+1}{\sqrt{1-x}+1}$
$\times$
$= \lim_{x \to 0} \frac{(\cancel{1}-x-\cancel{1})}{x^2(\sqrt{1-x}+1)} = \lim_{x \to 0} \frac{-\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}(\sqrt{1-x}+1)}$
$= \lim_{x \to 0} \frac{-1}{(\sqrt{1-x}+1)} = \frac{-1}{0(\sqrt{1-0}+1)} = \frac{-1}{0} = \infty$

8) பின்வருவனவற்றின் மதிப்பைக் காண்க:$\lim_{x \to \infty} \left(1+\frac{k}{x}\right)^{\frac{m}{x}}$

பதில் : $\lim_{x \to \infty} \left(1+\frac{k}{x}\right)^{\frac{m}{x}}$
$\frac{1}{x} = t$ என்க
$\therefore \lim_{x \to \infty} \left(1+\frac{k}{x}\right)^{\frac{m}{x}} = \lim_{\frac{1}{x} \to 0} (1+kt)^{mt}$
$= \lim_{t \to 0} (1+0)^{m(0)} = \lim_{t \to 0} 1^0 = 1$

9) பின்வருவனவற்றின் மதிப்பைக் காண்க: $\lim_{x \to 0} \frac{\tan 2x}{x}$

பதில் : $\lim_{x \to 0} \frac{\tan 2x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{sin\ 2x}{x cos\ 2x}$
$= \lim_{2x \to 0} \frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x} \cos 2x}$
$= 2 \lim_{2x \to 0} \frac{sin\ 2x}{2x} \times \frac{1}{[\lim_{x \to 0} cos\ 2x]}$
$= 2 \times 1 \times \frac{1}{1} = 2 \therefore \lim_{x \to 0} \frac{tan\ 2x}{x} = 2$

10) பின்வருவனவற்றின் தொடர்ச்சித் தன்மையை ஆராய்க:
$\cot x + \tan x$

பதில் : f(x) = cot x + tan x
cot x ஆனது π - ன் மடங்குகளிலும் tan x ஆனது (2n +1)$\frac{\pi}{2}$-லும் தொடர்ச்சியற்றது.
$\therefore f(x)$ =cot x + tan x ஆனது (2n +1)$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$-ல் உள்ள புள்ளிகளிலும் தொடர்ச்சியற்றது.
$\Rightarrow$ f(x) ஆனது $R - \frac{n\pi}{2}$, n $\in$ Z - ல் தொடர்ச்சியானது.

<u>3 மதிப்பெண் வினாக்கள்</u>

10 x 3 = 30

11) $\lim_{x \to 3} \frac{x^3-3^n}{x-3}$ =27 எனுமாறு உள்ள மிகை முழு எண் n-ஐ காண்க.

பதில் : $\lim_{x \to 3} \frac{x^3-3^n}{x-3} = n.3^{n-1} = 27$
அதாவது,$n.3^{n-1} = 3 \times 3^2 = 3 \times 3^{3-1} \Rightarrow n = 3$

12) மதிப்பிடுக:$\lim_{x \to 0} \frac{1}{(x^2+x^3)}$.

பதில் : புஜ்ஜியத்திற்கு அருகில் (இருபுறமிருந்தும் உள்ள x-ன் மதிப்புகளை அட்டவணைப்படுத்தினால் $f(x)=\frac{1}{x^2+x^3}-$ ன் மதிப்பு எல்லையற்று அதிகரிக்கின்றது என அறியலாம்.எனவே $x\to 0$ எனில் $f(x)\to\infty$ ஆகும்.
இந்தச் சார்பின் எல்லை மதிப்பினை அட்டவணை இல்லாமல் காண்பதற்கு, முதலில் தொகுதியையும் பகுதியையும் x^2 -ஆல் வகுக்க வேண்டும்.எல்லை மதிப்புக் காணும்போது $x\neq 0$ மற்றும் $x^2\neq 0$. எனவே வகுத்தல் சாத்தியமாகிறது.
$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2+x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2+x^3}{x^2}}=\frac{\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\lim_{x\to 0}(1+x)}$
தற்போது $x\to 0$ எனில் $\frac{1}{x^2}\to\infty$ மற்றும் $\lim_{x\to 0}(1+x)=1$.
அதாவது, பகுதி 1-ஐ நெருங்கும்போது தொகுதி முடிவில்லாமல் அதிகரிக்கின்றது. அதாவது, $\frac{1}{(x^2+x^3)}$ முடிவிலியை நோக்கிச் செல்கிறது எனலாம்.

13) உடலில் உள்ள ஆல்கஹாலை நுரையீரல்,சிறுநீரகம் போன்ற உறுப்புகளும் மற்றும் வேதி வினைமூலம் கல்லீரலும் வெளியேற்றுகின்றன. ஆல்கஹாலின் அடர்த்தி மிதமாக இருந்தால் அதை வெளியேற்றுகின்ற வேலையின் பெரும்பகுதியைக் கல்லீரலே செய்கின்றது. அதன் அளவில் 5%குக் குறைவாகவே நுரையீரலும், சிறுநீரகமும் வெளியேற்றுகின்றன.இரத்த ஓட்டத்தில் உள்ள ஆல்கஹாலை கல்லீரல் பிரித்தெடுக்கும் வீதம் r -க்கும் இரத்தத்தில் உள்ள ஆல்கஹாலின் அடர்த்தி x-க்கும் உள்ள தொடர்பு ஒரு விகிதமுறு சார்பாக $r(x)=\frac{\alpha x}{x+\beta}$ என உள்ளது. இங்கு a,β என்பன மிகை மாறிலிகள்.அல்கஹாலினை வெளியேற்றும் மீப்பெரு வீதம் காண்க.

பதில் : ஆல்கஹாலின் அடர்த்தி x-அதிகரிக்கும் போது அதை வெளியேற்றும் வீதமும் அதிகரிக்கின்றது. எனவே, வெளியேற்றும் மீப்பெரு வீதம் என்பது $\lim_{x\to\infty} r(x)$ ஆகும்.
$\lim_{x\to\infty} r(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\alpha x}{x+\beta}$
$=\lim_{x\to\infty}\frac{\alpha}{\left(1+\frac{\beta}{x}\right)}=\alpha$

14) எல்லையின் மதிப்பைக் காண்க: $\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-5x}{x^2-3x+1}$

பதில் : $\lim_{x\infty}\frac{x^4-5x}{x^2-3x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4\left(1-\frac{5}{x^3}\right)}{x^2\left(1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}$
$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{5}{x^3}\right)}{\left(1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=\infty\ [\because \frac{1}{x}\to 0; x\to\infty]$
$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-5x}{x^2-3x+1}=\infty$

15) எல்லையின் மதிப்பைக் காண்க: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2-1}\frac{x^2}{2x+1}\right)$

பதில் : $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2-1}\frac{x^2}{2x+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3(2x+1)-x^2(2x^2-1)}{(2x^2-1)(2x+1)}$
$=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{2x^4}+x^3-\cancel{2x^4}+x^2}{(2x^2-1)(2x+1)}$
$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2}{(2x^2-1)(2x+1)}$
$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(2-\frac{1}{x^2}\right)x\left(2+\frac{1}{x}\right)}$
$=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^3}\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x^3}\left(2-\frac{1}{x^2}\right)\left(2+\frac{1}{x}\right)}=\frac{1}{4}$
$[\because x\to\infty; \frac{1}{x}\to 0]$
$\therefore \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x+1}\right]=\frac{1}{4}$

16) மதிப்பைக் காண்க: $\lim_{x\to 0} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

பதில் : $-1\leq\sin\frac{1}{x}\leq 1$ என நமக்குத் தெரியும். இதிலிருந்து $-x^2\leq x^2\sin\frac{1}{x}\leq x^2$
இங்கு $(x)=-x^2,\quad f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}; h(x)=x^2$ என்க.
$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}(-x^2)=0$ மற்றும்
$\lim_{x\to 0} h(x)=\lim_{x\to 0}(x^2)=0$ ஆகும்.
இடையீட்டுத் தேற்றப்படி $\lim_{x\to 0} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$ ஆகும்.

17) மதிப்பைக் காண்க: $\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{2cosecx}$

பதில் : $\sin x=\frac{1}{y}$ என்க.

$x\to 0$எனில், $y\to\infty$ மற்றும்

$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{2cosecx}=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{2y}=\left[\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right]^2=e^2.$

18) பின்வருவனவற்றின் மதிப்பைக் காண்க: $\lim_{x\to\infty}\{x[\log(x+a)-\log(x)]\}$

பதில் : $\lim_{x\to\infty}\{x[\log(x+a)-\log(x)]\}$

$=\lim_{x\to\infty}\{x[log(x+a)-log(x)]\}$

$=\lim_{x\to\infty}x.log\left(\frac{x+a}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}xlog\left(1+\frac{a}{x}\right)$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{log\left(1+\frac{1}{x}\right)\times a}{\frac{1}{x}\times a}$, $\frac{1}{x}=y$என்க

$=a.\lim_{y\to 0}\frac{log(1+y)}{y}=a(1)=a$

$\left[\because \lim_{x\to 0}log\frac{(1+x)}{x}=1\right]$

19) பின்வருவனவற்றின் மதிப்பைக் காண்க: $\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}$

பதில் : $\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}=\lim_{x\to\pi}\frac{-sin\ 3x}{-sin\ 2x}$

$=\lim_{x\to\pi}\frac{sin(3x-3\pi)}{-sin(2x-2\pi)}$

$[\because sin(3x-3\pi)=-sin\ 3x; sin(2x-2\pi)=sin\ 2x]$

$=-\lim_{x\to\pi}\frac{sin(3x-3\pi)}{(3x-3\pi)}\frac{(3x-3\pi)}{(2x-2\pi)}\times\frac{(2x-2\pi)}{sin(2x-2\pi)}$

$=-\lim_{3x\to 3\pi}\frac{sin(3x-3\pi)}{(3x-3\pi)}\times\frac{(3x-3\pi)}{(2x-2\pi)}\times\frac{1}{\lim_{2x\to 2\pi}\frac{sin(2x-2\pi)}{(2x-2\pi)}}$

$=-1\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{1}=\frac{-3}{2}\left[\because \lim_{x\to\pi}\frac{(3x-3\pi)}{(2x-\pi)}=\frac{3(x-\pi)}{2(x-\pi)}=\frac{3}{2}\right]$

$\therefore \lim_{x\to\pi}\frac{sin\quad 3x}{sin\quad 2x}=-\frac{3}{2}$

20) பின்வரும் சார்புகளுக்கு தொடர்ச்சித் தன்மையைக் கொடுக்காத புள்ளிகளைக் காண்க.

$f(x)=\begin{cases}4x+5, & x\le 3\\ 4x-5, & x>3\end{cases}$

பதில் : $f(x)=\begin{cases}4x+5, & x\le 3\\ 4x-5, & x>3\end{cases}$

$\lim_{x\to 3^-}f(x)=\lim_{x\to 3^-}(4x+5)$

=4(3) + 5 = 17

$\lim_{x\to 3^+}f(x)=\lim_{x\to 3^+}(4x-5)$

= 12 - 5 = 7

$\lim_{x\to 3^-}f(x)\ne\lim_{x\to 3^+}f(x)$

$\therefore$ f(x) ஆனது x = 3-ல் தொடர்ச்சியற்றது.

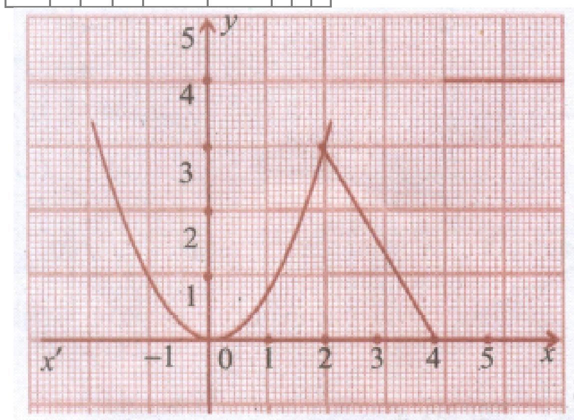
5 மதிப்பெண் வினாக்கள் 5 x 5 = 25

21) பின்வரும் கணக்கிற்கு f-ன் வரைபடம் வரைந்து x_0-ன் எந்த மதிப்புகளுக்கு $\lim_{x\to x_0}f(x)$ உள்ளது என்பதைக் காண்க.

$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\le 2\\ 8-2x, & 2<x<4\\ 4, & x\ge 4\end{cases}$

பதில் : $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 2 \\ 8-2x, & 2<x<4 \\ 4, & x\ge 4\end{cases}$

x	0	-1	2	3	3.5	4	5	6
f(x)	x^2	x^2	x^2	8-2x	8-2x	4	4	4
f(x)	0	1	4	2	1	4	4	4



x = 4 எனில் வளைவரைக்கு தீர்வு இல்லை.

$\therefore$ x = 4 ஐத் தவிர மற்ற மதிப்புகளுக்கு வளைவரைக்கு எல்லை மதிப்புள்ளது.

22) மதிப்பிடுக: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^x$

பதில் : $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2+4}{x-2}\right)^{x-2+2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x-2}\right)^{(x-2)+2}$

$y=x-2$ எனில் $x\to\infty$ எனும்போது $y\to\infty$

$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^x=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{y+2}=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{y}.\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{2}=e^4.1=e^4.$

23) பின்வருவனவற்றின் மதிப்பைக் காண்க:$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\tan x}$

பதில் : $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\tan x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+sin\quad x}-\sqrt{1-sin\quad x}}{tan\quad x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+sin\quad x}-\sqrt{1-sin\quad x}}{tan\quad x}\times\frac{\sqrt{1+sin\ x}+\sqrt{1-sin\ x}}{\sqrt{1+sin\ x}+\sqrt{1-sin\ x}}$

$\times$

(தொகுதி, பகுதியை $\sqrt{1+sin\ x}+\sqrt{1-sin\ x}$ ஆல் பெருக்க)

$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+sin\quad x)-(1-sin\ x)}{tan\ x(\sqrt{1+sin\ x}+\sqrt{1-sin\ x})}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{1}+\sin x-\cancel{1}+\sin x}{\frac{\sin x}{\cos x}\left[\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}\right]}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{2\cancel{\sin x}.\cos x}{\cancel{\sin x}\left[\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}\right]}\right]$$

$=2\lim_{x\to 0}\frac{cos\quad x}{\sqrt{1+sin\ x}+\sqrt{1-sin\ x}}$

$$=2\times\frac{1}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}}=\cancel{2}\times\frac{1}{2}=1$$

$\therefore\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+sin\ x}-\sqrt{1-sin\ x}}{tan\ x}=1$

24) $f(x)=\begin{cases}\frac{x^4-1}{x-1}, & ;x\ne 1\\ \alpha\quad, & ;\quad x=1\end{cases}$ என வரையறுக்கப்பட்ட சார்பில் x = 1-இல் சார்பு தொடர்ச்சியானது எனில், α-ன் மதிப்பு காண்க.

பதில் : $f(x)=\begin{cases}\frac{x^4-1}{x-1}, & ; x\neq 1\\ \alpha \quad , & ; \quad x=1\end{cases}$

$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^4-1}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x^2)^2-1^2}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x^2+1)(x^2-1)}{x-1}$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x^2+1)(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}}$$

=(2)(2) = 4

$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\alpha=\lim_{x\to 1}\frac{(x^4-1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1^+}\alpha=\lim_{x\to 1^+}(x^2+1)(x+1)=4$

$\lim_{x\to 1^+}\alpha=4$

f(x) ஆனது x =1, ஒரு பக்க எல்லை = சார்பின் மதிப்பு.

$\therefore$ f(1) = α = 4

$\therefore$ α=4

25) பின்வரும் சார்புகளில் எவற்றற்கு $x=x_0$-ல் நீக்கக்கூடிய தொடர்ச்சியற்ற தன்மை உள்ளது எனக் காண்க?தொடர்ச்சியற்ற தன்மை இருக்குமானால், f-ன் $x\neq x_0$-க்கு ஏற்றவாறு R-ல் தொடர்ச்சியாக இருக்குமாறு g என்ற சார்பைக் காண்க.

$f(x)=\frac{x^3+64}{x+4}, \quad x_0=-4$

பதில் : $f(x)=\frac{x^3+64}{x+4}$

x = -4-ல் சார்பு அமையாது.

$\therefore$ f(x) ஆனது x = -4-ல் நீக்கக் கூடிய தொடர்ச்சியற்ற தன்மை பெற்றுள்ளது.

$\lim_{x\to -4} f(x)=\lim_{x\to -4}\frac{x^3+64}{x+4}$

$$=\lim_{x\to -4}\frac{\cancel{(x+4)}\left(x^2-4x+16\right)}{\cancel{(x+4)}}$$

$=\lim_{x\to -4} x^2-4x+16$

=$(-4)^2$ - (-4) + 16

= 16 + 16 + 16 =48

$\therefore$ தொடர்ச்சியான சார்பு g(x) ஆனது.

$g(x)=\begin{cases}\frac{x^3+64}{x+4}, & x\neq -4\\ 48, & x=-4\end{cases}$ என எழுதலாம்.